Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт естественных наук
и математики

А. М. ИЛЬИН
А. Р. ДАНИЛИН

# СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

**А. М. Ильин, А. Р. Данилин**

# СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

**Учебное пособие**

Рекомендовано
методическим советом Уральского федерального университета
в качестве учебного пособия для студентов вуза,
обучающихся по направлениям подготовки 01.04.01 «Математика»,
01.04.03 «Механика и математическое моделирование»,
02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2018

УДК 517.98(075.8)
И 46

Рецензенты:
кафедра вычислительной математики
Челябинского государственного университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Павленко);
Л. А. Калякин, доктор физико-математических наук, профессор
(Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН)

**Ильин, А. М.**

И 46 Спектральное разложение самосопряженных операторов : учеб. пособие / А. М. Ильин, А. Р. Данилин; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 128 с.

ISBN 978-5-7996-2306-7

В учебном пособии рассматриваются вопросы функционального анализа, не вошедшие в общий курс функционального анализа по программе бакалавриата, в частности спектральное представление самосопряженных операторов (как ограниченных, так и неограниченных) в гильбертовом пространстве, неограниченные симметрические операторы и их самосопряженные расширения, унитарные операторы и их представления.

Для магистрантов математических специальностей классических университетов.

УДК 517.98(075.8)

ISBN 978-5-7996-2306-7 

# Оглавление

# Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для магистрантов математических факультетов, изучавших курс "Функциональный анализ и интегральные уравнения". Здесь рассмотрены вопросы спектрального разложения самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, как ограниченных, так и неограниченных, которые в основном курсе для студентов, обучавшихся по программе бакалавриата, не затрагивались совсем. Этот материал излагается в известных учебниках [1–4], однако многие из них давно не переиздавались. Кроме того, изложение в указанных пособиях часто опирается на материал, не содержащийся в стандартном курсе, и в основном касается ограниченных самосопряженных операторов.

Материал учебного пособия соответствует односеместровому курсу, читаемому в УрФУ для магистров второго года обучения. Первым автором этого лекционного курса был академик РАН Арлен Михайлович Ильин [5]. В настоящее время курс читается вторым соавтором данного пособия. Структура и содержание курса неоднократно обсуждались с Арленом Михайловичем. Предлагаемое учебное пособие является переработанным и расширенным вариантом ранее изданного пособия А. М. Ильина [5]. К сожалению, уход из жизни академика А. М. Ильина прервал нашу совместную работу. Завершать начатое пришлось второму соавтору.

Предполагается, что читатели знакомы с понятием гильбертова пространства и его основными свойствами. Как правило, доказательства утверждений, получающиеся непосредственным применением соответствующих определений, не приводятся. Изложение в достаточной мере замкнуто и не использует ни общих конструкций $C^*$-алгебр, ни теории Гельфанда – Наймарка, ни тонких методов интегрального исчисления.

Для более углубленного изучения материала можно порекомендовать уже указанные учебники [1–4], а также современное изложение спектральной теории ограниченных самосопряженных операторов в терминах категорий и функторов [6].

# Список используемых обозначений и соглашений

Если в утверждении, сформулированном с помощью предикатов, не указаны кванторы, то ко всем переменным подразумевается квантор всеобщности.

Все вводимые термины при первом упоминании выделяются *курсивом*.

Комментарии внутри цепочки формул даются либо внутри квадратных скобок, либо над символами отношений.

Если в теореме сформулировано несколько утверждений, то номер доказываемого утверждения заключается в рамку. Различные этапы доказательства конкретного утверждения нумеруются без заключения номера в рамку.

Символом $\blacksquare$ обозначается окончание доказательства или замечаний (когда это необходимо).

Запись $A := B$ или $B =: A$ означает, что $A$ определяется посредством $B$.

Для обозначения множеств натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел используются символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно.

$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Символ $\mathbb{P}$ используется в качестве общего обозначения для $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

$\mathbb{P}[x]$ — множество полиномов над полем $\mathbb{P}$.

Если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\mathfrak{Re}\,\lambda$ и $\mathfrak{Im}\,\lambda$ — вещественная и мнимая части числа $\lambda$ соответственно.

Если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\overline{\lambda}$ — число, комплексно сопряженное к $\lambda$.

Запись $A \subset B$ или $B \supset A$ означает нестрогое включение, т. е. равенство $A = B$ не исключено.

$f(x)$ — значение отображения (функции) $f$ в точке $x$, а $f(\cdot)$ — само отображение (функция) $f$, которое используется для подчеркивания характера объекта, обозначенного символом $f$.

Если $f : D(f) \subset X \to Y$, то $Im\, f := f(D(f))$.

$f\big|_A$ — сужение отображения $f$ на $A \subset D(f)$.

Часто у семейства множеств или элементов множества не указывается множество индексов, например, вместо $\{ e_\alpha \}_{\alpha \in A}$ и $\bigcup\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ пишется $\{ e_\alpha \}$ и $\bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha$ соответственно.

$\delta_{k,n}$ – символ Кронекера.

$||x||$ — норма элемента $x$ нормированного пространства.

$(x, y)$ — скалярное произведение элементов евклидова пространства.

$l_2$ — гильбертово пространство последовательностей.

$l_{2,fin}$ — евклидово пространство финитных последовательностей со скалярным произведением из $l_2$.

$M[a; b]$, $C[a; b]$, $C^k[a; b]$, $L_2(a; b)$ и $W_2^k(a; b)$ — нормированные пространства функций (классов функций).

$\langle \{ e_\alpha \} \rangle$ — линейная оболочка системы векторов $\{ e_\alpha \}$ в линейном пространстве. Вместо $\langle \{ e_1, \ldots, e_n \} \rangle$ часто пишется просто $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

Под подпространством нормированного пространства понимается замкнутое линейное многообразие.

$\overline{M}$ — замыкание множества $M$ в нормированном пространстве.

$I$ или $I_X$ — тождественное отображение множества $X$ на себя, т. е. $Ix := x$.

$\mathcal{L}(X, Y)$ — нормированное пространство линейных непрерывных операторов, определенных на нормированном пространстве $X$ со значениями в нормированном пространстве $Y$.

$\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

$\langle x, x^* \rangle$ — значение линейного функционала $x^*$ на элементе $x$, т. е. $x^*(x)$.

$x_n \to x_0$ — последовательность элементов $\{ x_n \}$ нормированного пространства сходится к элементу $x_0$.

$x_n \xrightarrow{сл} x_0$ — последовательность элементов $\{ x_n \}$ нормированного пространства слабо сходится к элементу $x_0$.

$Ker\, A$ — ядро линейного оператора $A$.

$\rho(A)$ — множество регулярных точек оператора $A$.

$\sigma(A)$ — спектр линейного оператора $A$.

$\sigma_d(A)$ — дискретный спектр линейного оператора $A$, т. е. множество всех собственных чисел линейного оператора $A$.

$A_n \xrightarrow[M]{} A_0$ — последовательность линейных операторов $\{ A_n \}$ поточечно сходится к $A_0$ на множестве $M$, т. е. $A_n x \to A_0 x$ для любого $x$ из $M$.

$A_n \rightrightarrows A_0$ — последовательность линейных операторов $\{ A_n \}$ равномерно сходится к $A_0$, т. е. $\|A_n - A_0\| \to 0$.

Математическая структура $\langle X, \mathcal{R} \rangle$, где $X$ — множество, а $\mathcal{R}$ — набор различных отображений и отношений, часто обозначается одним символом $X$.

Множество, на котором определена математическая структура, часто обозначается так же, как и структура. Например, обозначение нормированного пространства $C[a;b]$ часто используется для обозначения множества непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, на котором это нормированное пространство определено.

# 1. Гильбертово пространство: сводка результатов

В этой главе приводятся основные определения и факты теории евклидовых и гильбертовых пространств (см., например, [7, 8]).

**Определение.** Пусть $X$ — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $(\cdot,\cdot) : X^2 \to \mathbb{P}$ называется *скалярным произведением на* $X$, если:

1. $(x,x) \geqslant 0$;
2. $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
3. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$ — *линейность по первому аргументу.*
4. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ — комплексное сопряжение.

**Замечание.** Если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то скалярное произведение симметрично и, следовательно, линейно и по второму аргументу. Таким образом, в этом случае $(\cdot,\cdot)$ есть *билинейное отображение.* Если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то $(z, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda}(z,x) + \overline{\mu}(z,y)$. В этом случае $(\cdot,\cdot)$ — *полуторалинейное отображение.*

**Определение.** Линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

**Пример 1.1.** $(x,y) := \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \overline{y}_i$ — скалярное произведение в $X := \mathbb{P}^k$; $l_2^k := \langle X, (\cdot,\cdot)\rangle$.

**Пример 1.2.** $(x(\cdot), y(\cdot)) := \int\limits_a^b x(t)\overline{y}(t)\,dt$ — скалярное произведение в линейном пространстве $X$ непрерывных на $[a;b]$ функций со значениями в $\mathbb{P}$; $\widetilde{L}_2[a;b] := \langle X, (\cdot,\cdot)\rangle$.

**Теорема 1.1** (неравенство Коши — Буняковского). *Если $X$ — евклидово пространство, то*

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}. \tag{1.1}$$

**Следствие.** *Если $X$ — евклидово пространство, то $||x|| := \sqrt{(x,x)}$ — норма на $X$.*

**Утверждение 1.1.** *Пусть $X$ — евклидово пространство, $X \ni x \neq 0$ и $X \ni y \neq 0$. Тогда*

$$|(x,y)| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} \Longleftrightarrow \exists\, \mathbb{P} \ni \lambda \neq 0 : y = \lambda x.$$

**Следствие.** *Пусть $X$ — евклидово пространство, $X \ni x \neq 0$ и $X \ni y \neq 0$. Следующие утверждения эквивалентны*:

1. $(x,y) = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.
2. $||x+y|| = ||x|| + ||y||$.
3. $\exists\, \lambda > 0 \,:\, y = \lambda x$.

**Замечание.** Евклидово пространство является нормированным пространством относительно нормы, порожденной скалярным произведением, и, следовательно, метрическим пространством относительно метрики, порожденной этой нормой.

**Определение.** Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством.*

**Определения.** Пусть $X$ — евклидово пространство.

1. $x \perp y := (x,y) = 0$.
2. $X_1 \perp X_2 := \forall\, x_1 \in X_1 \,\forall\, x_2 \in X_2 \quad x_1 \perp x_2$.
3. Система векторов $\{\, e_\alpha \,\}$ называется *ортогональной*, если

$$\forall\, \alpha, \beta \ (\alpha \neq \beta \Longrightarrow e_\alpha \perp e_\beta).$$

4. Система векторов $\{\, e_\alpha \,\}$ называется *ортонормированной*, если она ортогональна и нормирована (т. е. $\forall\, \alpha \ \ \|e_\alpha\| = 1$).

5. Система векторов $\{ e_\alpha \}$ называется *тотальной*, если

$$(\forall \alpha \;\; x \perp e_\alpha) \Longrightarrow x = 0.$$

6. Множество $\{ x \in X : \forall y \in M \;\; x \perp y \}$ ортогональных элементов к множеству $M$ обозначается $M^\perp$.

7. $x \perp M := x \in M^\perp$.

**Теорема 1.2** (теорема Пифагора). *Пусть $X$ — евклидово пространство; $x, y \in X$. Если $x \perp y$, то $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.*

**Замечания.** 1. В вещественном евклидовом пространстве справедлива теорема, обратная теореме Пифагора.

2. В комплексном евклидовом пространстве теорема, обратная теореме Пифагора, несправедлива. Например, в $X = \mathbb{C}$ $|1+i|^2 = 2 = |1|^2 + |i|^2$, но $(i, 1) = i \neq 0$.

**Утверждение 1.2.** *Пусть $X$ — евклидово пространство. Тогда:*

1. *Если $X \supset \{ x_k \}\big|_1^m$ ортогональна, то*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{m} ||x_k||^2. \tag{1.2}$$

2. *Если $X \supset \{ x_k \}$ ортогональна, то*

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится} \right) \Longleftrightarrow \left( \sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2 \text{ сходится} \right). \tag{1.3}$$

**Утверждение 1.3.** *В сепарабельном евклидовом пространстве всякая ортонормированная система векторов не более чем счетна.*

**Утверждение 1.4.** *Если система ненулевых векторов в евклидовом пространстве ортогональна, то она линейно независима.*

**Утверждение 1.5.** *Пусть $X$ — евклидово пространство, $\{ e_\alpha \} \subset X$, $x \in X$. Если $\forall \alpha \; x \perp e_\alpha$, то $x \perp \overline{\langle \{ e_\alpha \} \rangle}$.*

**Следствия.** *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть $X$ — евклидово пространство, $M \subset X$. Тогда $M^\perp$ — подпространство, т. е. замкнутое линейное многообразие.*

2. *Если система векторов в евклидовом пространстве полна, то она и тотальна.*

**Утверждение 1.6.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $H_1$, $H_2$ — линейные многообразия в $H$, $H_1 \perp H_2$ и $H_3 := H_1 \oplus H_2$. Тогда ($H_3$ — подпространство) $\Longleftrightarrow$*
*$\big((H_1$ — подпространство$) \wedge (H_2$ — подпространство$)\big)$.*

**Доказательство.** $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $H_1 \ni x_n \to x_0 \in H_3 \Longrightarrow$ существуют такие $\widetilde{x} \in H_1$ и $y \in H_2$, что $x_0 = \widetilde{x} + y \Longrightarrow H_1 \ni (x_n - \widetilde{x}) \to y \in H_2 \Longrightarrow 0 = (x_n - \widetilde{x}, y) \to \|y\|^2 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x_0 = \widetilde{x} \in H_1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Пусть $H_3 \ni z_n = x_n + y_n \to z_0$, где $x_n \in H_1$ и $y_n \in H_2$. Тогда $\{z_n\}$ фундаментальна. Но

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\|^2 \overset{(1.2)}{=} \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2.$$

Поэтому $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ тоже фундаментальные последовательности. Тогда найдутся такие $x_0 \in H_1$ и $y_0 \in H_2$, что $x_n \to x_0 \in H_1$ и $y_n \to y_0 \in H_2$. Поэтому $z_0 = x_0 + y_0 \in H_3$. ■

**Теорема 1.3** (теорема Шмидта об ортогонализации). *Для любой линейно независимой системы векторов $\{ x_n \}$ в евклидовом пространстве $X$ существует ортонормированная система векторов $\{ e_n \}$ такая, что*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle.$$

**Следствие.** *В сепарабельном евклидовом пространстве существует не более чем счетная полная ортонормированная система векторов.*

**Определения.** 1. Пусть $L$ — линейное многообразие в евклидовом пространстве $X$. *Ортогональной проекцией вектора $x$ на $L$* называется вектор $\widehat{x} \in L : (x - \widehat{x}) \perp L$.

2. Пусть $X$ — метрическое пространство и $M \subset X$. *Метрической проекцией элемента $x$ на множество $M$* называется элемент $\widehat{x} \in M : \rho(x, \widehat{x}) = \rho(x, M)$.

**Теорема 1.4.** *Пусть $L$ — линейное многообразие в евклидовом пространстве $X$ и $x_0 \in X$. Тогда:*

1. *Если $\widehat{x}_0$ — ортогональная проекция вектора $x_0$ на линейное многообразие $L$ в евклидовом пространстве $X$ существует, то она единственна и $||\widehat{x}_0|| \leqslant ||x_0||$.*

2. *Если $\widehat{x} \in L$, то $\big((\widehat{x}$ — ортогональная проекция $x_0$ на $L) \Longleftrightarrow (\widehat{x}$ — метрическая проекция $x_0$ на $L)\big)$.*

**Определение.** Ортогональную проекцию вектора $x$ на линейное многообразие $L$ в евклидовом пространстве (если она существует) будем обозначать $Pr_L(x)$.

**Теорема 1.5.** *Пусть $M$ — выпуклое и замкнутое множество в гильбертовом пространстве $H$. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует метрическая проекция $x_0$ на $M$.*

**Теорема 1.6.** *$M$ — подпространство гильбертова пространства $H$. Тогда $\forall\, x \in H \,\exists\, Pr_M(x)$ и $H = M \oplus M^{\perp}$.*

**Определения.** 1. Если $M$ — подпространство в гильбертовом пространстве, то $M^{\perp}$ называют также *ортогональным дополнением* ($M$ *до* $H$).

2. Операторы вида $Pr_M$ называются *ортопроекторами.*

**Определение.** Пусть $X$ — нормированное пространство. Говорят, что $\{ x_n \} \subset X$ *слабо сходится к* $x_0 \in X$, и пишут $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$ (или $x_n \rightharpoonup x_0$), если

$$\forall\, x^* \in X^* \quad \langle x_n, x^* \rangle \to \langle x_0, x^* \rangle.$$

**Утверждение 1.7.** *Пусть $X$ — нормированное пространство, $\{ x_n \} \subset X$ и $x_n \to x_0$. Тогда $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$.*

**Замечание.** В гильбертовом пространстве $H$

$$x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0 \iff \forall\, a \in H \quad (x_n, a) \to (x_0, a).$$

**Теорема 1.7** (о критерии слабой сходимости в гильбертовом пространстве). *Пусть $H$ — гильбертово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$.
2. $\{ x_n \}$ *ограничена, и*

$$\forall\, y \in H_1 \;\; (x_n, y) \to (x_0, y),$$

*где $H_1$ — некоторая полная в $H$ система.*

**Утверждение 1.8.** *Пусть $X$ — нормированное пространство и $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$. Тогда $\|x_0\| \leqslant \varliminf \|x_n\|$.*

**Теорема 1.8.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$ и $\|x_n\| \to \|x_0\|$. Тогда $x_n \to x_0$.*

**Теорема 1.9.** *В гильбертовом пространстве замкнутый шар слабо секвенциально компактен, т. е. из любой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу этого шара.*

В дальнейшем будем рассматривать в основном гильбертовы пространства.

# 2. Ограниченные операторы

В этой главе рассматриваются основные свойства линейных ограниченных операторов и операторов, сопряженных к ним.

**Определение.** Пусть $X$, $Y$ — нормированные пространства и $A : X \to Y$ — линейный оператор. Будем говорить, что *оператор $A$ строго отделен от нуля*, если

$$\exists\, c > 0\, \forall\, x \in X \ \ ||Ax|| \geqslant c||x||, \tag{2.1}$$

или, что то же самое, $\inf\limits_{||x||=1} ||Ax|| > 0$.

**Утверждение 2.1.** *Пусть $X$, $Y$ — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда:*

1. *($A$ не является строго отделенным от нуля)* $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \Big(\exists\, \{x_n\} \subset X\ \big((\|x_n\| = 1) \wedge (Ax_n \to 0)\big)\Big).$$

2. *Если $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, то $A$ строго отделен от нуля.*
3. *Если $A$ строго отделен от нуля, то $Ker\, A = \{0\}$.*
4. *Если $X$ — банахово пространство и $A$ строго отделен от нуля, то $Im\, A$ есть банахово пространство и, следовательно, замкнуто.*

**Доказательство.** $\boxed{4}$. Пусть $Im\, A \supset \{\, y_n \,\}$ фундаментальна. Тогда

$$\exists\, \{\, x_n \,\} \subset X \ :\ y_n = Ax_n \text{ и } ||x_n - x_m|| \leqslant ||y_n - y_m||/c \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{\, x_n \,\} \text{ фундаментальна} \Longrightarrow \exists\, x_0 \in X \ :\ x_n \to x_0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow Ax_n = y_n \to Ax_0 \in Im\, A. \ \blacksquare$$

**Определение.** Пусть $H_1$, $H_2$ — гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, тогда $A^*$ — *эрмитово сопряженный* к $A$ оператор, если

$$\forall\, x \in H_1 \;\forall\, y \in H_2 \;\; (Ax, y)_{H_2} = (x, A^* y)_{H_1}.$$

**Утверждение 2.2.** *Пусть $H_1$, $H_2$ — гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Тогда:*

1. *Существует оператор $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, и справедливо равенство $\|A^*\| = \|A\|$.*
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $A^{**} = A$.
3. $(Im\, A)^{\perp} = Ker\, A^*$, $(Ker\, A)^{\perp} = \overline{Im\, A^*}$.
4. *Если $Im\, A$ — подпространство, то $(Ker\, A)^{\perp} = Im\, A^*$.*

**Утверждение 2.3.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathcal{L}(H)$. Тогда*

$$H = Ker\, A \oplus \overline{Im\, A^*} = Ker\, A^* \oplus \overline{Im\, A}. \qquad (2.2)$$

**Утверждение 2.4.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $\{\, A_n \,\} \subset \mathcal{L}(H)$. Тогда:*

1. *Если для любого $x \in H$ последовательность $\{\, A_n x \,\}$ сходится и оператор $A_0 : H \to H$ определен формулой*

$$A_0 x := \lim_{n\to\infty} A_n x,$$

*то $A_0 \in \mathcal{L}(H)$.*

2. *Если $A_0 \in \mathcal{L}(H)$ и $A_n \underset{H}{\to} A_0$, то $\forall\, x \in H \;\; A_n^* x \xrightarrow{\text{сл}} A_0^* x$.*
3. *Если $B \in \mathcal{L}(H)$ и $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; A_n B = B A_n$, то $A_0 B = B A_0$.*

**Теорема 2.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, операторы $A : H \to H$ и $B : H \to H$ являются линейными и*

$$\forall\, x, y \in H \;\; (Ax, y) = (x, By).$$

*Тогда $A$, $B \in \mathcal{L}(H)$ и $B = A^*$.*

**Доказательство.** 1. Покажем, что $B \in \mathcal{L}(H)$. Предположим противное:

$$\exists\, y_n \subset H\, (\|y_n\| = 1 \wedge \|By_n\| \to \infty).$$

Но $By_n$ порождает линейный непрерывный функционал $\varphi_n$ по формуле $\varphi_n(\cdot) := (\cdot, By_n)$, и справедливо соотношение

$$\|\varphi_n\| = \|By_n\| \to \infty. \tag{2.3}$$

Поскольку для любого $x \in H$

$$\|\varphi_n(x)\| = \|(x, By_n)\| = \|(Ax, y_n)\| \leqslant \|Ax\| \cdot \|y_n\| \leqslant \|Ax\|,$$

то последовательность $\{\, \varphi_n \,\}$ поточечно ограничена, поэтому в силу теоремы Банаха — Штейнгауза (см., например, [8, теорема 3.2.1]) последовательность $\{\, \|\varphi_n\| \,\}$ тоже ограничена, что противоречит соотношению (2.3).

2. $||Ax|| = \sup\limits_{||y|| \leqslant 1} |(Ax, y)| = \sup\limits_{||y|| \leqslant 1} |(x, By)| \leqslant ||B|| \cdot ||x||.$

3. $(x, A^*y) = (Ax, y) = (x, By) \Longrightarrow A^* = B.$ ■

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство.

Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е.

$$\forall\, x, y \in H \;\; (Ax,\, y) = (x, Ay).$$

Множество всех самосопряженных линейных непрерывных операторов в $H$ будем обозначать $sa\mathcal{L}(H)$.

**Утверждение 2.5.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство. Тогда*:

1. *Если $A \in \mathcal{L}(H)$, то $A^*A,\ AA^*,\ A + A^* \in sa\mathcal{L}(H)$.*
2. *Если $A,\ B \in sa\mathcal{L}(H)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то*

$$\lambda A,\ A + B,\ ABA \in sa\mathcal{L}(H).$$

3. *Если* $A$*,* $B \in sa\mathcal{L}(H)$*, то* $\Big(AB = BA \Longleftrightarrow AB \in sa\mathcal{L}(H)\Big)$.

4. *Если* $\{ A_n \} \subset sa\mathcal{L}(H)$ *и для любого* $x \in H$ *последовательность* $\{ A_n x \}$ *сходится, то существует* $A_0 \in sa\mathcal{L}(H)$ *такой, что* $A_n \underset{H}{\rightarrow} A_0$.

5. *Если* $A \in sa\mathcal{L}(H)$ *и* $n \in \mathbb{N}$*, то* $\Big(Ax_0 = 0 \Longleftrightarrow A^n x_0 = 0\Big)$.

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathcal{L}(H)$. Примем обозначение $Q_A(x) := (Ax, x)$.

**Утверждение 2.6.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство над полем* $\mathbb{P}$ *и* $A \in \mathcal{L}(H)$*. Тогда:*

1. $Q_I(x) = \|x\|^2$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{P} \quad Q_A(\lambda x) = |\lambda|^2 Q_A(x)$.
3. *Для* $Q_A(x)$ *справедлива оценка*

$$|Q_A(x)| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|^2. \tag{2.4}$$

4. *Если* $\mathcal{L}(H) \ni A_n \underset{H}{\longrightarrow} A$*, то* $Q_{A_n}(x) \to Q_A(x)$.
5. *Если* $\mathbb{P} = \mathbb{C}$*, то для любых* $x, y \in H$

$$\begin{aligned} (Ax, y) = \frac{1}{4}\Big(Q_A(x+y) - Q_A(x-y)\Big) + \\ + \frac{i}{4}\Big(Q_A(x+iy) - Q_A(x-iy)\Big), \\ (Ay, x) = \frac{1}{4}\Big(Q_A(x+y) - Q_A(x-y)\Big) - \\ - \frac{i}{4}\Big(Q_A(x+iy) - Q_A(x-iy)\Big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

6. *Если* $\mathbb{P} = \mathbb{R}$*, то для любых* $x, y \in H$

$$(Ax, y) + (x, Ay) = \frac{1}{2}\Big(Q_A(x+y) - Q_A(x-y)\Big).$$

7. *Если* $\mathbb{P} = \mathbb{C}$*, то* $\Big(A = B \Longleftrightarrow Q_A = Q_B\Big)$.
8. *Если* $A \in sa\mathcal{L}(H)$*, то* $Q_{A^2}(x) = \|Ax\|^2$.

**Теорема 2.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Если $A \in sa\mathcal{L}(H)$, то*

$$\forall\, x \in H\;\; Q_A(x) \in \mathbb{R} \textit{ и } \sigma(A) \subset \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\beta \neq 0$.

1. Покажем, что $(A - \lambda I)$ строго отделен от нуля. Для любого $x \in H$ справедливо соотношение

$$||(A-\lambda I)x||^2 = \big((A-\lambda I)x, (A-\lambda I)x\big) =$$
$$= ||(A-\alpha I)x||^2 + ||i\beta x||^2 - \big((A-\alpha I)x, i\beta x\big) - \big(i\beta x, (A-\alpha I)x\big) =$$
$$= ||(A-\alpha I)x||^2 + ||i\beta x||^2 \geqslant \beta^2 ||x||^2.$$

Итак,
$$\forall\, x \in H\;\; ||(A-\lambda I)x|| \geqslant |\beta| \cdot ||x||,$$

поэтому в силу утверждения 2.1 множество $Im\,(A-\lambda I)$ замкнуто и $Ker\,(A-\lambda I) = \{0\}$.

2. Поскольку $\overline{\lambda} \notin \mathbb{R}$, то $Ker\,(A - \overline{\lambda} I) = \{0\}$ и

$$H \overset{(2.2)}{=} Ker\,(A-\overline{\lambda} I) \oplus \overline{Im\,(A^* - \overline{\lambda} I)^*} = Im\,(A-\lambda I),$$

т. е. $Im\,(A-\lambda I) = H$. Таким образом, $(A-\lambda I)$ — непрерывная линейная биекция $H$ на $H$. Поэтому по теореме Банаха об обратном отображении $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, т. е. $\lambda \in \rho(A)$. ∎

**Следствие.** *Пусть $A \in sa\mathcal{L}(H)$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $e_1 \perp e_2$.*

**Утверждение 2.7.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Если $A \in \mathcal{L}(H)$ и $\forall\, x \in H\;\; Q_A(x) \in \mathbb{R}$, то $A \in sa\mathcal{L}(H)$.*

**Доказательство.** В этом случае в силу формул (2.5) получим

$$\begin{aligned} 4\Re e(Ax,y) &= Q_A(x+y) - Q_A(x-y), \\ 4\Im m(Ax,y) &= Q_A(x+iy) - Q_A(x-iy), \end{aligned} \tag{2.6}$$

и, следовательно, $(x, Ay) = \overline{(Ay,x)} \overset{(2.5)}{=} (Ax,y)$.

**Теорема 2.3.** (о норме самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве). *Пусть $H$ — гильбертово пространство. Если $A \in sa\mathcal{L}(H)$, то $||A|| = \sup\limits_{||x||=1} |Q_A(x)|$.*

**Доказательство.** 1. $\alpha := \sup\limits_{||x||=1} |Q_A(x)| \overset{(2.4)}{\leqslant} ||A||$.

2. Пусть $x \neq 0$, тогда $|Q_A(x)| \leqslant \alpha ||x||^2$.

3. В силу первого из равенств (2.6) из п. 2 получим

$$4|\Re e\,(Ax,y)| \leqslant \alpha||x+y||^2 + \alpha||x-y||^2 = 2\alpha\big(||x||^2 + ||y||^2\big).$$

Взяв $||x|| = 1$ такой, что $Ax \neq 0$ и $y = Ax/||Ax||$, из этого неравенства получим

$$4\Re e\,\big(Ax, Ax/||Ax||\big) = 4||Ax|| \leqslant 4\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ||Ax|| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||A|| \leqslant \alpha. \ \blacksquare$$

**Утверждение 2.8.** *Пусть $H_1$, $H_2$ — гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Тогда $||A||^2 = ||A^*A||$.*

**Утверждение 2.9.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in sa\mathcal{L}(H)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.*
2. *Оператор $A$ строго отделен от нуля.*

**Доказательство.** $\boxed{\Longleftarrow}$. По утверждению 2.1 $Ker\,A = \{0\}$ и $Im\,A$ — подпространство. Поэтому в силу утверждения 2.2

$$Im\,A = (Ker\,A^*)^{\perp} = (Ker\,A)^{\perp} = H.$$

Тем самым по теореме Банаха об обратном отображении оператор $A^{-1}$ непрерывен на $\mathcal{L}(H)$. ∎

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *неотрицательным*, что обозначается $A \geqslant 0$, если $\forall\, x \in H\ \ Q_A(x) \geqslant 0$.

**Замечания:**

1. Часто оператор $A \geqslant 0$ называют *положительным*.

2. Мы будем называть оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ *положительным* и писать $A > 0$, если

$$A > 0 := (A \geqslant 0) \wedge \big(x \neq 0 \Longrightarrow Q_A(x) \neq 0\big).$$

3. Можно рассмотреть и еще один класс линейных операторов, которые будем называть *строго положительными* и обозначать $A \gtrdot 0$, а именно

$$A \gtrdot 0 := (A \geqslant 0) \wedge \big(\exists\, c > 0\ \forall\, x \in H\ \ Q_A(x) \geqslant c||x||\big).$$

4. Отметим, что в силу утверждения 2.7 неотрицательный линейный оператор в гильбертовом пространстве над полем $\mathbb{C}$ самосопряжен.

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *неотрицательным*, что обозначается $A \geqslant 0$, если $A = A^*$ и

$$\forall\, x \in H\ \ Q_A(x) \geqslant 0.$$

**Замечание.** Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{P}$ и $A \in \mathcal{L}(H)$. Если $A > 0$, то $A \in sa\mathcal{L}(H)$, а если $A \gtrdot 0$, то $A > 0$ и оператор $A$ строго отделен от нуля.

**Утверждение 2.10.** *Пусть $H_1$, $H_2$ — гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Тогда $A^*A \geqslant 0$ и $AA^* \geqslant 0$.*

**Следствие.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in sa\mathcal{L}(H)$. Тогда $A^2 \geqslant 0$.*

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in sa\mathcal{L}(H)$. Введем обозначения:

$$m(A) := \inf_{||x||=1} Q_A(x), \quad M(A) := \sup_{||x||=1} Q_A(x). \tag{2.7}$$

**Утверждение 2.11.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in sa\mathcal{L}(H)$. Тогда*:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad m(A - \lambda I) = m(A) - \lambda$, $M(A - \lambda I) = M(A) - \lambda$.
2. *Если $0 \notin [m(A), M(A)]$, то $A$ строго отделен от нуля.*
3. $A \geqslant 0 \iff m(A) \geqslant 0$.
4. $A \gg 0 \iff m(A) > 0$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и оператор $A \geqslant 0$. Тогда $\|A\| \in \sigma(A)$.*

**Доказательство.** В силу теоремы 2.3 найдется последовательность $\{ x_n \} \subset H$ такая, что $||x_n|| = 1$ и $(Ax_n, x_n) \to ||A||$. Тогда

$$0 \leqslant ||(A - ||A||I)x_n||^2 = ||Ax_n||^2 + ||A||^2||x_n||^2 - 2||A||(Ax_n, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant 2||A||^2 - 2||A||(Ax_n, x_n) \to 0.$$

В силу утверждения 2.9 $\|A\| \in \sigma(A)$. ■

**Теорема 2.4.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in sa\mathcal{L}(H)$. Тогда*

$$\{m(A), M(A)\} \subset \sigma(A) \subset [m(A), M(A)] \text{ и}$$
$$||A|| = \max\{|m(A)|, |M(A)|\}.$$

**Доказательство.** Примем обозначения $\alpha := m(A)$ и $\beta := M(A)$.

1. Пусть $A_\alpha := A - \alpha I$. Тогда $A_\alpha \geqslant 0$ и по теореме 2.3 $||A_\alpha|| = \beta - \alpha$. В силу леммы 2.1

$$||A_\alpha|| = (\beta - \alpha) \in \sigma(A_\alpha) = \sigma(A) - \alpha \Longrightarrow \beta \in \sigma(A).$$

2. Пусть $A_\beta := \beta I - A$. Тогда $A_\beta \geqslant 0$ и по теореме 2.3 $||A_\beta|| = \beta - \alpha$. В силу леммы 2.1

$$(\beta - \alpha) \in \sigma(A_\beta) = \beta - \sigma(A) \Longrightarrow \alpha \in \sigma(A).$$

3. Пусть $\lambda > \beta$. Тогда $A_\lambda := \lambda I - A \gtrdot 0$. В силу п. 2 и 4 утверждения 2.11 оператор $(A - \lambda I)$ строго отделен от нуля. Тогда по утверждению 2.9 получим $\lambda \in \rho(A)$.

Аналогично рассматривается случай $\lambda < m(A)$. ■

**Теорема 2.5** (о норме компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве). *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in sa\mathcal{L}(H)$.*

*Если $A \in comp\,\mathcal{L}(H)$, то*

$$\exists\,\lambda \in \mathbb{R}\ \exists\,x_0 \neq 0\ \ (Ax_0 = \lambda x_0 \wedge |\lambda| = ||A||),$$

*т. е.* $||A|| = \max|\sigma_d(A)|$ (см., например, [8, теорема 3.15.4]).

**Теорема 2.6** (теорема Гильберта — Шмидта о базисе из собственных векторов самосопряженного оператора). *Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство, оператор $A \in comp\,\mathcal{L}(H) \bigcap sa\mathcal{L}(H)$. Тогда существует ортонормированный базис пространства $H$, состоящий из собственных векторов оператора $A$* (см., например, [8, теорема 3.15.5]).

# 3. Свойства неотрицательных операторов

В этой главе рассмотрены важные свойства неотрицательных операторов.

**Утверждение 3.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A$, $B \in sa\mathcal{L}(H)$, $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$. Тогда*:

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ A^n \geqslant 0$.

2. *Обобщенное неравенство Коши*:

$$\forall\, x, y \in H\ \ |(Ax, y)|^2 \leqslant Q_A(x) Q_A(y). \tag{3.1}$$

3. *Для* $\|Ax\|$ *справедлива оценка*

$$\forall\, x \in H\ \ \|Ax\|^2 \leqslant \|A\| Q_A(x). \tag{3.2}$$

4. $Q_A(x_0) = 0 \iff Ax_0 = 0$.

5. $Ax_0 + Bx_0 = 0 \iff Ax_0 = 0 = Bx_0$.

**Доказательство.** $\boxed{2}$. 2.1. Если $(Ax, y) = 0$, то неравенство (3.1) выполнено в силу того, что $A \geqslant 0$.

2.2. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена следующим образом:

$$f(\lambda) := \Big(A\big(x + \lambda (Ax, y) y\big), x + \lambda (Ax, y) y\Big) =$$

$$= \lambda^2 |(Ax, y)|^2 (Ay, y) + 2\lambda |(Ax, y)|^2 + (Ax, x).$$

Поскольку $A \geqslant 0$, то $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ \ f(\lambda) \geqslant 0$.

2.3. Если $(Ay, y) = 0$, то и $(Ax, y) = 0$, поскольку в противном случае $f(\lambda) \to -\infty$ при $\lambda \to -\infty$.

2.4. Если $(Ay,y)\neq 0$, то $f(\lambda)$ — неотрицательный квадратный трехчлен, поэтому его дискриминант не положителен:

$$4|(Ax,y)|^4-4(Ax,x)|(Ax,y)|^2(Ay,y)\leqslant 0.$$

$\boxed{3}$. $\|Ax\|^4 = |(Ax,Ax)|^2 \overset{(3.1)}{\leqslant} Q_A(x)\cdot Q_A(Ax) \overset{(2.4)}{\leqslant} Q_A(x)\cdot\|A\|\cdot\|Ax\|^2$. ■

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A,B\in\mathcal{L}(H)$. Запись $A\geqslant B$ (или $B\leqslant A$) означает, что операторы $A$ и $B$ самосопряженные и $(A-B)\geqslant 0$. Это неравенство эквивалентно следующему соотношению:

$$\forall\, x\in H\;\; Q_A(x)\geqslant Q_B(x). \tag{3.3}$$

**Утверждение 3.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A$, $B$, $C\in sa\mathcal{L}(H)$. Тогда:*

1. $A\geqslant A$.
2. $A\geqslant B \Longleftrightarrow (-B)\geqslant(-A)$.
3. $\big((A\geqslant B)\wedge(B\geqslant A)\big)\Longrightarrow(A=B)$.
4. $\big((A\geqslant B)\wedge(B\geqslant C)\big)\Longrightarrow(A\geqslant C)$.
5. $(A\geqslant B)\Longrightarrow\big((A+C)\geqslant(B+C)\big)$.
6. $\big((A\geqslant B)\wedge(\mathbb{R}\ni\lambda\geqslant 0)\big)\Longrightarrow\big((\lambda A)\geqslant(\lambda B)\big)$.
7. $\big((B\geqslant 0)\wedge(-B\leqslant A\leqslant B\big)\Longrightarrow(\|A\|\leqslant\|B\|)$.
8. $(0\leqslant A\leqslant B)\Longrightarrow(\|A\|\leqslant\|B\|)$.
9. $(\|A\|\leqslant K)\Longleftrightarrow(-KI\leqslant A\leqslant KI)$.
10. *Если $A\geqslant B\geqslant 0$ и $Ax_0=0$, то и $Bx_0=0$.*

**Доказательство.** $\boxed{7}$. В силу (3.3) для любого $x\in H$ такого, что $\|x\|\leqslant 1$, имеем $-Q_B(x)\leqslant Q_A(x)\leqslant Q_B(x)$. Поскольку $Q_B(x)\geqslant 0$, то

$$|Q_A(x)|\leqslant Q_B(x)\overset{\text{теор. 2.3}}{\leqslant}\|B\|\overset{\text{теор. 2.3}}{\Longrightarrow}\|A\|\leqslant\|B\|.$$

$\boxed{9,\Longrightarrow}$. Докажем неравенство $KI\geqslant A$:

$$\big((KI-A)x,x\big)=K\|x\|^2-(Ax,x)\overset{\text{теор. 2.3}}{\geqslant}\|x\|^2(K-\|A\|)\geqslant 0.$$

Неравенство $A \geqslant (-KI)$ доказывается аналогично. ∎

**Утверждение 3.3.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A_0 \in sa\mathcal{L}(H)$, $\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\} \subset sa\mathcal{L}(H)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $A_n \leqslant B_n \leqslant C_n$. Тогда*:

1. *Если $A_n \xrightarrow[H]{} A_0$ и $C_n \xrightarrow[H]{} A_0$, то $B_n \xrightarrow[H]{} A_0$.*
2. *Если $A_n \rightrightarrows A_0$ и $C_n \rightrightarrows A_0$, то $B_n \rightrightarrows A_0$.*

**Теорема 3.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $\{A_n\} \subset sa\mathcal{L}(H)$, $B \in sa\mathcal{L}(H)$ и*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ A_n \leqslant A_{n+1} \leqslant B\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\ A_n \geqslant A_{n+1} \geqslant B).$$

*Тогда существует $A_0 \in sa\mathcal{L}(H)$ такой, что*

$$A_n \xrightarrow[H]{} A_0 \text{ и } A_0 \leqslant B\ (A_0 \geqslant B).$$

**Доказательство.** Не ограничивая общности, можно считать, что $A_n \geqslant 0$ при всех $\mathbb{N}$. Тогда в силу п. 8 утверждения 3.2 при всех $\mathbb{N}$ справедливы неравенства $||A_n|| \leqslant ||B||$. Тогда в силу неравенства (3.2) для любого $x \in H$ и любых $n, p \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $\|A_{n+p}x - A_n x\|^2 \leqslant$ $\leqslant \|A_{n+p} - A_n\| \cdot Q_{A_{n+p}-A_n}(x) \leqslant 2\|B\| \cdot Q_{A_{n+p}-A_n}(x)$.

В силу условий теоремы последовательность $\{Q_{A_n}(x)\}$ монотонна и ограничена и поэтому является сходящейся. Таким образом, последовательность $\{A_n x\}$ — фундаментальная, а значит, и сходящаяся. В силу п. 4 утверждения 2.5 существует $A_0 \in sa\mathcal{L}(H)$ такой, что $A_n \xrightarrow[H]{} A_0$.

Наконец, $Q_B(x) \geqslant Q_{A_n}(x) \to Q_{A_0}(x)$. ∎

**Лемма 3.1** (о представлении неотрицательного оператора). *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ и $A \geqslant 0$. Тогда существует последовательность операторов $\{A_n\} \subset sa\mathcal{L}(H)$ такая, что*:

1. $\forall\, C \in \mathcal{L}(H)\ \big((AC = CA) \Longrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ A_n C = C A_n)\big)$.
2. $\forall\, x \in H\ \ Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^2 x$.

**Доказательство.** Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\|A\| \leqslant 1 \tag{3.4}$$

и, следовательно, в силу п. 9 утверждения 3.2 $A \leqslant I$.

Определим последовательность самосопряженных операторов $\{ A_n \} \subset \mathcal{L}(H)$ следующим образом:

$$A_1 := A,\ A_{n+1} := A_n - A_n^2. \tag{3.5}$$

Отметим, что $A_n$ — полином степени $2^{n-1}$ от $A$.

1. В силу следствия из утверждения 2.10 и формулы (3.5) имеем $A_n - A_{n+1} = A_n^2 \geqslant 0$, поэтому

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ I \geqslant A \geqslant A_n \geqslant A_{n+1}.$$

2. Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ покажем, что $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ A_n \geqslant 0$.

Отметим, что при $n = 1$ доказываемое неравенство справедливо в силу условий леммы.

Из предположения индукции следует, что

$$Q_{A_n^2}(x) = (A_n x, A_n x) \overset{(3.2)}{\leqslant} \|A_n\| Q_{A_n}(x) \overset{(3.4)}{\leqslant} Q_{A_n}(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_n \geqslant A_n^2 \Longrightarrow A_{n+1} \overset{(3.5)}{=} A_n - A_n^2 \geqslant 0.$$

3. Поскольку $A_n$ — полиномы от $A$, то

$$\forall\, C \in \mathcal{L}(H)\ \ AC = CA \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ A_n C = C A_n.$$

4. Для любых $N \in \mathbb{N}$ и $x \in H$

$$Ax \overset{(3.5)}{=} \sum_{n=1}^{N} A_n^2 x + A_{N+1} x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q_A(x) = \sum_{n=1}^{N} Q_{A_n^2}(x) + Q_{A_{N+1}}(x) \overset{2}{\geqslant} \sum_{n=1}^{N} Q_{A_n^2}(x).$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_{A_n^2}(x)$ с неотрицательными слагаемыми сходится и, в частности, $Q_{A_n^2}(x) = \|A_n x\|^2 \to 0$. ∎

**Утверждение 3.4.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A$, $B \in sa\mathcal{L}(H)$ и $AB = BA$. Тогда:*

1. *Если $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$, то $AB \geqslant 0$.*
2. *Если $A \geqslant B \geqslant 0$, то $\forall\, n \in \mathbb{N}\ A^n \geqslant B^n$.*

**Доказательство.** $\boxed{1}$. В силу леммы 3.1 для любого $x \in H$ получим:

$$Q_{AB}(x) = Q_{BA}(x) = \Big(B \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 x, x\Big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (BA_n^2 x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n B A_n x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_B(A_n x) \geqslant 0.$$

$\boxed{2}$. $A^n - B^n = (A - B)\big(A^{n-1} + A^{n-1}B + \ldots + B^{n-1}\big)$. ■

**Теорема 3.2** (о существовании квадратного корня из неотрицательного ограниченного оператора). *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ и $A \geqslant 0$. Тогда существует единственный оператор $B \in \mathcal{L}(H)$ такой, что $B \geqslant 0$ и $A = B^2$.*

*При этом если оператор $C \in \mathcal{L}(H)$ такой, что $AC = CA$, то $BC = CB$. В частности, $AB = BA$.*

**Доказательство.** Как и при доказательстве леммы 3.1, не ограничивая общности, можно считать, что $\|A\| \leqslant 1$. Тем самым справедливо неравенство $A \leqslant I$.

Определим последовательность самосопряженных операторов $\{\, B_n \,\} \subset \mathcal{L}(H)$ следующим образом:

$$B_1 := 0, \quad B_{n+1} := B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2). \tag{3.6}$$

Отметим, что $B_n$ — полином от $A$, поэтому

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ AB_n = B_n A.$$

1. Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ покажем, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ 0 \leqslant B_n \leqslant B_{n+1} \leqslant I.$$

При $n = 1$ доказываемое соотношение очевидно.

Далее:

$$I - B_{n+1} \overset{(3.6)}{=} I - B_n - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B_n^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(I - A) + \frac{1}{2}(B_n^2 - 2B_n + I) =$$

$$= \frac{1}{2}(I - A) + \frac{1}{2}(B_n - I)^2 \geqslant 0.$$

Теперь в силу утверждения 3.4

$$B_{n+1} - B_n \overset{(3.6)}{=} (B_n - B_{n-1}) - \frac{1}{2}(B_n - B_{n-1})(B_n + B_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(B_n - B_{n-1})\big((I - B_n) + (I - B_{n-1})\big) \geqslant 0.$$

2. В силу теоремы 3.1 существует $B \in \mathcal{L}(H)$ такой, что

$$B \leqslant I \text{ и } \forall\, x \in H \;\; B_n x \to Bx.$$

Переходя во второй части соотношений (3.6) к пределу при $n \to +\infty$, получим $A = B^2$.

3. Если $C \in \mathcal{L}(H)$ такой, что $AC = CA$, то в силу (3.6)

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; B_n C = C B_n,$$

а значит, и $BC = CB$.

4. Покажем единственность оператора $B$.

Пусть $\widetilde{B} \in \mathcal{L}(H)$ — еще один оператор такой, что $\widetilde{B} \geqslant 0$ и $\widetilde{B}^2 = A$. Тогда

$$\widetilde{B}^3 = A\widetilde{B} = \widetilde{B}A \overset{3}{\Longrightarrow} B\widetilde{B} = \widetilde{B}B.$$

Но $0 = B^2 - \widetilde{B}^2 = (B + \widetilde{B})(B - \widetilde{B})$, поэтому для любого $x \in H$ и $y := (B - \widetilde{B})x$ получим $(B + \widetilde{B})y = 0$. Отсюда в силу п. 6 утверждения 3.1 следует, что

$$By = 0 = \widetilde{B}y \Longrightarrow 0 = (B - \widetilde{B})y = (B - \widetilde{B})^2 x = 0.$$

Отсюда следует, что $0 = Q_{(B-\widetilde{B})}(x) = \|(B-\widetilde{B})x\|^2$. ■

**Определения.** Пусть $H$ — гильбертово пространство, оператор $A \in sa\mathcal{L}(H)$.

1. Если $A \geqslant 0$, то оператор $B \in \mathcal{L}(H)$ такой, что $B \geqslant 0$ и $A = B^2$, называется *корнем квадратным из оператора* $A$ и обозначается $\sqrt{A}$.

2. $|A| := \sqrt{A^2}$.

Отметим, что в силу теоремы 3.2 $A\sqrt{A} = \sqrt{A}\,A$.

**Утверждение 3.5.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in sa\mathcal{L}(H)$. Тогда*:

1. *Если $A \geqslant 0$, то $|A| = A$.*
2. *Если $A \leqslant 0$, то $|A| = -A$.*
3. *$Ax = 0 \iff |A|x = 0$.*
4. *Если $B \in \mathcal{L}(H)$ и $AB = BA$, то $|A|B = B|A|$.*

**Пример 3.1.** Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ имеет вид

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n,$$

где $\{ e_n \}$ — ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства $H$, а $\{ x_n \}$ — координаты вектора $x$ в базисе $\{ e_n \}$.

1. $A \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\forall\, n \in \mathbb{N}\;\; \lambda_n \geqslant 0$.

При этом $\sqrt{A}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} x_n e_n$.

2. $|A|x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| x_n e_n$.

# 4. Свойства ортопроекторов

В этой главе рассматриваются операторы ортогонального проектирования, которые играют важную роль при представлении самосопряженных операторов.

**Утверждение 4.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, а $H_1$ — его подпространство. Тогда*

$$Pr_{H_1}x = x \Longleftrightarrow x \in H_1.$$

*При этом*

$$Im\, Pr_{H_1} = H_1,\ Ker\, Pr_{H_1} = H_1^{\perp},\ I - Pr_{H_1} = Pr_{H_1^{\perp}}. \qquad (4.1)$$

**Следствия.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство. Тогда*:

1. *($P$ — ортопроектор) $\Longleftrightarrow$ $\big((I-P)$ — ортопроектор$\big)$.*
2. *Если $P_1$, $P_2$, — ортопроекторы, то*

$$P_1 = P_2 \Longleftrightarrow Ker\, P_1 = Ker\, P_2.$$

**Утверждение 4.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, а $P$ — ортопроектор в $H$. Тогда*:

1. *Если $P \neq 0$, то $\|P\| = 1$.*
2. *$\|x\| \leqslant \|Px\| \Longleftrightarrow Px = x$.*
3. *$P^2 = P$.*
4. *$P^* = P$.*
5. *$I \geqslant P \geqslant 0$.*
6. *Если $I \neq P \neq 0$, то $\sigma(P) = \{0, 1\}$.*
7. *$Q_P(x) = ||Px||^2$.*

**Доказательство.** $\boxed{1{,}2}$. $\|x\|^2 \overset{(4.1)}{=} \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2$.

$\boxed{4}$. Пусть $x, y \in H$. Тогда

$$(Px, y) = \big(Px, Py + (I-P)y\big) \overset{(4.1)}{=} (Px, Py).$$

Аналогично $(x, Py) = \big(Px + (I-P)x, Py\big) = (Px, Py)$. Тем самым $(Px, y) = (x, Py)$.

$\boxed{5}$. В силу сдедующей цепочки равенств

$$(Px, x) \overset{3}{=} (P^2x, x) \overset{4}{=} (Px, Px) = \|Px\|^2 \geqslant 0$$

получим, что $P \geqslant 0$.

В силу последнего равенства в соотношениях (4.1) оператор $(I-P)$ является ортопроектором. Тем самым $I - P \geqslant 0$.

$\boxed{6}$. Пусть $P = Pr_{H_0}$, $0 \neq x_0 \in H_0$ и $0 \neq x_1 \in (H_0)^{\perp}$. Тогда $Px_0 = x_0$ и $Px_1 = 0$, т. е. $\{0,1\} \subset \sigma_d(P)$.

Пусть $\{0,1\} \not\ni \lambda \in \sigma(P)$. Тогда в силу утверждений 2.9 и 2.1 найдется $\{x_n\} \subset H$ такая, что $\|x_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и имеет место сходимость $(P - \lambda I)x_n \to 0$. Но

$$P(P - \lambda I)x_n = (1-\lambda)Px_n \to 0.$$

Поэтому $Px_n \to 0$. Отсюда следует, что $\lambda x_n \to 0$. Тогда $x_n \to 0$, что противоречит соотношению $\|x_n\| = 1$. ■

**Теорема 4.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, а $P : H \to H$ — линейный оператор такой, что $P^2 = P$ и*

$$\forall\, x, y \in H \ \ (Px, y) = (x, Py).$$

*Тогда $P$ — ортопроектор.*

**Доказательство.** 1. Из второго условия в силу теоремы 2.1 имеем $P \in sa\mathcal{L}(H)$.

2. Рассмотрим подпространство $H_1 := Ker\,(I-P)$. Тогда

$$x \in H_1 \Longleftrightarrow Px = x.$$

Покажем, что $P = Pr_{H_1}$.

Для любых $x \in H$ и $y \in H_1$ справедливо соотношение

$$(x - Px, y) = (x - Px, Py) = (Px - P^2x, y) = (0, y) = 0.$$

Тем самым $\forall\, x \in H \;\; x - Px \in H_1^{\perp}$. ■

**Утверждение 4.3.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $H_1$ и $H_2$ — его подпространства, а $P_i := Pr_{H_i}$ $(i = 1, 2)$. Тогда*:

1. $P_1P_2 = 0 \Longleftrightarrow P_2P_1 = 0 \Longleftrightarrow H_1 \perp H_2$.
2. ($P_1P_2$ — *ортопроектор* ) $\Longleftrightarrow P_1P_2 = P_2P_1$.
3. ($P_1 + P_2$ — *ортопроектор* ) $\Longleftrightarrow P_1P_2 = 0$.
*В этом случае* $P_1 + P_2 = Pr_{H_1 \oplus H_2}$.
4. $P_1P_2 = P_2 \Longleftrightarrow P_2P_1 = P_2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \forall\, x \in H \;\; \|P_1x\| \geqslant \|P_2x\| \Longleftrightarrow P_1 \geqslant P_2 \Longleftrightarrow H_1 \supset H_2$.

5. ($P_1 - P_2$ — *ортопроектор* ) $\Longleftrightarrow P_1 \geqslant P_2$.
*В этом случае* $P_1 - P_2 = Pr_{H_1 \ominus H_2}$.

**Доказательство.** $\boxed{1}$. 1.1. Так как $0 \in sa\mathcal{L}(H)$, то в силу п. 3 утверждения 2.5 $P_1P_2 = P_2P_1$.

1.2. Пусть $x \in H_1$ и $y \in H_2$. Тогда $P_1x = x$ и $P_2y = y$. Отсюда следует, что

$$(x, y) = (P_1x, P_2y) \overset{\text{п.4. утв. 4.2}}{=} (x, P_1P_2y) = 0.$$

1.3. $H_1 \perp H_2 \Longrightarrow \forall\, x_i \in H \;\; P_ix_i \in H_i \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 0 = (P_1x_1, P_2x_2) = (x_1, P_1P_2x_2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall\, x_2 \in H \;\; P_1P_2x_2 = 0 \Longrightarrow P_1P_2 = 0.$$

$\boxed{2, \Longleftarrow}$. В силу п. 3 утверждения 2.5 $P_1P_2 \in sa\mathcal{L}(H)$. При этом $(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$. Теперь осталось применить теорему 4.1.

$\boxed{3, \Longrightarrow}$. В силу следующей цепочки равенств

$$P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = \\ = P_1 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2,$$

справедливо равенство $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$. Умножив его слева на $P_1$, получим $P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0$. Поэтому

$$P_1P_2 = -P_1P_2P_1 \overset{\text{п. 2 утв. 2.5}}{\in} sa\mathcal{L}(H) \overset{\text{п. 3 утв. 2.5}}{\Longrightarrow} P_1P_2 = P_2P_1.$$

$\boxed{4}$. 4.1. Пусть $P_1P_2 = P_2 \overset{2}{\Longrightarrow} P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$.

4.2. Пусть $P_2P_1 = P_2$. Тогда

$$||P_2x|| = ||P_2P_1x|| \leqslant ||P_2|| \cdot ||P_1x|| \overset{\text{п.1. утв. 4.2}}{\leqslant} ||P_1x||.$$

4.3. Пусть $\forall\, x \in H \;\; \|P_2x\| \leqslant \|P_1x\|$. Тогда

$$Q_{P_1-P_2}(x) = Q_{P_1}(x) - Q_{P_2}(x) \overset{\text{п.7. утв. 4.2}}{=}$$

$$= ||P_1x||^2 - ||P_2x||^2 \geqslant 0.$$

4.4. Пусть $P_1 \geqslant P_2$ и $x \in H_2$. Тогда

$$0 \leqslant Q_{P_1-P_2}(x) = ||P_1x||^2 - ||P_2x||^2 =$$

$$= ||P_1x||^2 - ||x||^2 \overset{\text{п.2. утв. 4.2}}{\Longrightarrow} x = P_1x \Longrightarrow x \in H_1.$$

4.5. Импликация $H_2 \subset H_1 \Longrightarrow P_1P_2 = P_2$ очевидна.

$\boxed{5}$. В силу следствия из утверждения 4.1 имеем

$$((P_1 - P_2) \text{ — ортопроектор}) \iff$$

$$\iff ((I - (P_1 - P_2) = (I - P_1) + P_2 \text{ — ортопроектор}) \overset{3}{\iff}$$

$$\iff (I - P_1)P_2 = 0 \iff P_1P_2 = P_2 \overset{4}{\iff} P_1 \geqslant P_2. \;\blacksquare$$

**Теорема 4.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, а $\{\, P_n \,\}$ — монотонная последовательность ортопроекторов в $H$, т. е. либо $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; P_{n+1} \geqslant P_n$, либо $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; P_{n+1} \leqslant P_n$. Тогда существует такой ортопроектор $P_0$, что $P_n \underset{H}{\longrightarrow} P_0$.*

*При этом в первом случае* $P_0 = Pr_{\overline{\langle\bigcup\limits_n H_n\rangle}}$, *где подпространства* $H_n$ *таковы, что* $P_n = Pr_{H_n}$, *а во втором случае* $P_0 = Pr_{\bigcap\limits_n H_n}$.

**Доказательство.** 1. Поскольку $0 \leqslant P_n \leqslant I$, то в силу теоремы 3.1 существует оператор $P_0 \in sa\mathcal{L}(H)$ такой, что $0 \leqslant P_0 \leqslant I$ и $P_n x \xrightarrow[H]{} P_0 x$.

2. Поскольку для любых $x, y \in H$

$$(P_n^2 x, y) = (P_n x, P_n y) \to (P_0 x, P_0 y) = (P_0^2 x, y) \text{ и}$$
$$(P_n^2 x, y) = (P_n x, y) \to (P_0 x, y),$$
$$\text{то } (P_0^2 x, y) = (P_0 x, y) \Longrightarrow P_0^2 = P_0.$$

Тем самым по теореме 4.1 оператор $P_0$ — ортопроектор. ∎

**Следствие.** *Пусть* $H$ — *гильбертово пространство,* $\{H_n\}$ — *последовательность подпространств в* $H$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо включение* $H_{n+1} \supset H_n$, *а* $P_n = Pr_{H_n}$. *Тогда*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} = H \Longleftrightarrow P_n \xrightarrow[H]{} I. \tag{4.2}$$

**Утверждение 4.4.** *Пусть* $H$ — *гильбертово пространство,* $\{P_n\}$, $P_0$ — *ортопроекторы в* $H$ *и* $\forall\, x \in H$ $P_n x \xrightarrow{сл} P_0 x$. *Тогда* $\forall\, x \in H$ $P_n x \to P_0 x$.

**Доказательство.** В силу п. 7 утверждения 3.1 имеем

$$\|P_n x\|^2 = Q_{P_n}(x) = (P_n x, x) \to Q_{P_0}(x) = \|P_0 x\|^2.$$

Поэтому по теореме 1.8 получим $P_n x \to P_0 x$. ∎

# 5. Разложение единицы, порожденное самосопряженным ограниченным оператором

В этой главе рассматриваются специальные семейства ортопроекторов, по которым строятся операторные интегралы.

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство. *Разложением единицы в $H$* называется семейство ортопроекторов $\{ I_\lambda \}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, удовлетворяющих следующим свойствам:

1. $\lambda \leqslant \mu \Longrightarrow I_\lambda \leqslant I_\mu$ (и тем самым $I_\mu I_\lambda \overset{\text{п. 4 утв. 4.3}}{=} I_\lambda$).
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ I_{\lambda - 0} = I_\lambda$.
3. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_\lambda = 0$ и $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I_\lambda = I$.

Пределы в п. 2 и 3 данного определения понимаются в смысле поточечной сходимости линейных операторов на $H$.

**Утверждение 5.1.** *Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разложение единицы в гильбертовом пространстве $H$. Тогда*:

1. *Если $I_\lambda = 0$, то $\forall \mu \leqslant \lambda\ I_\mu = 0$.*
2. *Если $I_\lambda = I$, то $\forall \mu \geqslant \lambda\ I_\mu = I$.*
3. *Если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, то*

$$(I_b - I_a)(I_d - I_c) = 0, \ (I_c - I_b)(I_d - I_a) = I_c - I_b. \qquad (5.1)$$

**Определение.** Будем говорить, что *разложение единицы $\{ I_\lambda \}$ в гильбертовом пространстве $H$ сосредоточено на* $[m, M]$, если $I_m = 0$ и $I_M = I$.

**Утверждение 5.2.** *Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разложение единицы в гильбертовом пространстве $H$. Тогда для любого $x \in H$ функция $q(\lambda; x) := Q_{I_\lambda}(x) = \|I_\lambda x\|^2$ есть неубывающая ограниченная функция. При этом*:

1. *Если* $\lambda \leqslant \mu$, *то*

$$q(\mu;x) - q(\lambda;x) = \|I_\mu x - I_\lambda x\|^2. \tag{5.2}$$

2. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} q(\lambda;x) = 0$ *и* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} q(\lambda;x) = \|x\|^2$. ■

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in sa\mathcal{L}(H)$.

Определим семейства операторов и подпространств, зависящих от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} A_\lambda := A - \lambda I, & \widehat{H}_\lambda := Ker\,(A_\lambda - |A_\lambda|), \\ \widehat{I}_\lambda := Pr_{\widehat{H}_\lambda}, & I_\lambda = I - \widehat{I}_\lambda. \end{array} \tag{5.3}$$

Отметим, что в силу (4.1)

$$Ker\,(A_\lambda - |A_\lambda|) = Ker\,I_\lambda. \tag{5.4}$$

Далее покажем, что семейство ортопроекторов $\{\, I_\lambda \,\}$, определенное формулами (5.3), есть разложение единицы в $H$.

**Пример 5.1.** Пусть $H$ — гильбертово пространство, $H_1$ — его подпространство, $\{0\} \neq H_1 \neq H$, а $A := P := Pr_{H_1}$ — ортопроектор. Тогда

$$|A_\lambda| = |P - \lambda I| = \begin{cases} P - \lambda I, & \lambda \leqslant 0, \\ \lambda I + (1-2\lambda)P, & \lambda \in (0;1), \\ \lambda I - P, & \lambda \geqslant 1. \end{cases}$$

Это проверяется непосредственно по определению модуля от самосопряженного оператора.

Покажем, например, что $\lambda I + (1-2\lambda)P \geqslant 0$ при $\lambda \in (0;1)$. Действительно, в силу неотрицательности проекторов получим

$$\lambda I + (1-2\lambda)P = \lambda(I-P) + (1-\lambda)P \geqslant 0.$$

Поэтому $A_\lambda - |A_\lambda| = \begin{cases} 0I, & \lambda \leqslant 0, \\ 2\lambda(P-I), & \lambda \in (0;1), \\ 2(P-\lambda I), & \lambda \geqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \widehat{H}_\lambda = \begin{cases} H, & \lambda \leqslant 0, \\ H_1, & \lambda \in (0;1], \\ 0, & \lambda > 1 \end{cases} \text{ и } I_\lambda = \begin{cases} 0, & \lambda \leqslant 0, \\ I-P, & \lambda \in (0;1], \\ I, & \lambda > 1. \end{cases}$$

**Пример 5.2.** Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство; $A \in \mathcal{L}(H)$ — самосопряженный компактный оператор; $\{\, e_n \,\}$ — ортонормированный базис пространства $H$, состоящий из собственных векторов оператора $A$, т. е. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $Ae_n = \lambda_n e_n$, а $P_n = Pr_{\langle e_n \rangle}$. Тогда

$$|A_\lambda| = \sum_n |\lambda_n - \lambda| P_n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Ker\,(A_\lambda - |A_\lambda|) = Ker \sum_{\lambda_n < \lambda} \lambda_n P_n =$$

$$= Ker \sum_{\lambda_n < \lambda} P_n = Ker\, I_\lambda \Longrightarrow \widehat{I}_\lambda = \sum_{\lambda_n \geqslant \lambda} P_n,\ \ I_\lambda = \sum_{\lambda_n < \lambda} P_n.$$

**Теорема 5.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in sa\mathcal{L}(H)$, а семейства ортопроекторов $\{\, \widehat{I}_\lambda \,\}$ и $\{\, I_\lambda \,\}$ определены формулами (5.3). Тогда:*

1. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ $Ker\, A_\lambda \subset Ker\, I_\lambda$.
2. $A_\lambda \widehat{I}_\lambda = |A_\lambda|\, \widehat{I}_\lambda$, $I_\lambda A_\lambda = -I_\lambda\, |A_\lambda|$.
3. *Если $C \in sa\mathcal{L}(H)$ и $AC = CA$, то*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \qquad \big(\widehat{I}_\lambda C = C\widehat{I}_\lambda\big) \wedge \big(I_\lambda C = CI_\lambda\big).$$

4. *Все операторы $A_\lambda$, $|A_\mu|$, $I_\nu$ и $\widehat{I}_\pi$ перестановочны между собой при любых $\lambda$, $\mu$, $\nu$ и $\pi$.*
5. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ $A_\lambda I_\lambda \leqslant 0 \leqslant A_\lambda \widehat{I}_\lambda$.
6. $\lambda \leqslant \mu \Longrightarrow I_\lambda \leqslant I_\mu$.
7. *Если $\lambda < \mu$, то*

$$\lambda(I_\mu - I_\lambda) \leqslant A(I_\mu - I_\lambda) \leqslant \mu(I_\mu - I_\lambda). \tag{5.5}$$

8. $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ $I_{\lambda-0} = I_\lambda$ — *непрерывность слева (в смысле поточечной сходимости).*

9. *Если* $\lambda \leqslant m(A)$, *а* $\mu > M(A)$, *то* $I_\lambda = 0$ *и* $I_\mu = I$, *где* $m(A)$ *и* $M(A)$ *определены равенствами* (2.7).

**Доказательство.** $\boxed{1}$. $A_\lambda x = 0 \overset{\text{п.3 утв. 3.5}}{\Longrightarrow} |A_\lambda| x = 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x \in Ker\,(A_\lambda - |A_\lambda|) \overset{(5.4)}{=} Ker\, I_\lambda$.

$\boxed{2}$. 2.1. Поскольку для любого $x \in H$ справедливы соотношения $\widehat{I}_\lambda x \in \widehat{H}_\lambda$, то в силу определения $\widehat{H}_\lambda$ (см. соотношения (5.3)) справедливо равенство $(A_\lambda - |A_\lambda|)\widehat{I}_\lambda x = 0$, или $A_\lambda \widehat{I}_\lambda = |A_\lambda|\widehat{I}_\lambda$.

2.2. Поскольку в силу утверждения 3.5 для любого $x \in H$

$$(A_\lambda - |A_\lambda|)(A_\lambda + |A_\lambda|)x = (A_\lambda^2 - |A_\lambda|^2)x = 0,$$

то в силу определения $\widehat{H}_\lambda$ (см. соотношения (5.3))

$$(A_\lambda + |A_\lambda|)x \in \widehat{H}_\lambda.$$

Поэтому $\widehat{I}_\lambda(A_\lambda + |A_\lambda|)x = (A_\lambda + |A_\lambda|)x$. Таким образом, умножив последнее равенство на $I_\lambda$, получим

$$0 = I_\lambda(A_\lambda + |A_\lambda|) \Longrightarrow I_\lambda A_\lambda = -I_\lambda |A_\lambda|.$$

$\boxed{3}$. Отметим прежде всего, что так как операторы $C$ и $A$ перестановочны, то и операторы $C$ и $A_\lambda$ перестановочны. Поэтому в силу п. 4 утверждения 3.5 операторы $C$ и $|A_\lambda|$ тоже перестановочны.

3.1. Умножив равенство $A_\lambda \widehat{I}_\lambda = |A_\lambda|\,\widehat{I}_\lambda$ на оператор $C$, получим для любого $x \in H$

$$0 = C(A_\lambda - |A_\lambda|)\widehat{I}_\lambda x = (A_\lambda - |A_\lambda|)C\widehat{I}_\lambda x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C\widehat{I}_\lambda x \in \widehat{H}_\lambda \Longrightarrow \widehat{I}_\lambda C\widehat{I}_\lambda x = C\widehat{I}_\lambda x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C\widehat{I}_\lambda = \widehat{I}_\lambda C\widehat{I}_\lambda \in sa\mathcal{L}(H) \Longrightarrow C\,\widehat{I}_\lambda = \widehat{I}_\lambda C.$$

3.2. $CI_\lambda = C(I-\widehat{I}_\lambda) = C - C\widehat{I}_\lambda \overset{3.1}{=} C - \widehat{I}_\lambda C = (I-\widehat{I}_\lambda)C = I_\lambda C$.

$\boxed{5}$. Эти соотношения есть следствие равенств из п. 2 доказываемой теоремы и п. 1 утверждения 3.4.

$\boxed{6}$. В силу (5.3) и предыдущих пунктов доказываемой теоремы и утверждения 3.4 справедливы неравенства

$$0 \geqslant (\lambda - \mu)\widehat{I}_\mu I_\lambda = (A_\mu - A_\lambda)\widehat{I}_\mu I_\lambda = (A_\mu \widehat{I}_\mu) I_\lambda + (-A_\lambda I_\lambda)\widehat{I}_\mu \geqslant 0.$$

Поэтому $0 = I_\lambda \widehat{I}_\mu = I_\lambda(I - I_\mu) \Longrightarrow I_\lambda I_\mu = I_\lambda \overset{\text{п.4 утв. 4.3}}{\Longrightarrow} I_\mu \geqslant I_\lambda$.

$\boxed{7}$. $A(I_\mu - I_\lambda) - \lambda(I_\mu - I_\lambda) = A_\lambda(I_\mu - I_\lambda) \overset{6}{=}$

$$= A_\lambda(I_\mu - I_\mu I_\lambda) = (A_\lambda \widehat{I}_\lambda)\, I_\mu \overset{\text{утв. 3.4}}{\geqslant} 0.$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

$\boxed{8}$. Так как $I_\lambda$ монотонна и ограничена, то по теореме 4.2 существует ортопроектор $I_{\lambda-0}$ и

$$I_{\lambda-0} \leqslant I_\lambda. \tag{5.6}$$

В силу (5.5) для любого $\nu < \lambda$ справедливо неравенство

$$\nu(I_\lambda - I_\nu) \leqslant A(I_\lambda - I_\nu) \leqslant \lambda(I_\lambda - I_\nu).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\nu \to \lambda - 0$, получим

$$A\,(I_\lambda - I_{\lambda-0}) = \lambda(I_\lambda - I_{\lambda-0}) \Longrightarrow A_\lambda(I_\lambda - I_{\lambda-0}) = 0 \overset{1}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow 0 = I_\lambda(I_\lambda - I_{\lambda-0}) \Longrightarrow I_\lambda = I_\lambda I_{\lambda-0} \overset{(5.6)}{=} I_{\lambda-0}.$$

$\boxed{9}$. 9.1. $A_{m(A)} = A - m(A)I \overset{(2.7)}{\geqslant} 0 \overset{\text{п. 1 утв. 3.5}}{\Longrightarrow}$

$$\Longrightarrow |A_{m(A)}| = A_{m(A)} \Longrightarrow \widehat{H}_{m(A)} = H \Longrightarrow \widehat{I}_{m(A)} = I \Longrightarrow I_{m(A)} = 0.$$

9.2. Если $\lambda > M(A)$, то $A_\lambda \leqslant 0$ и $Ker\, A = \{0\}$. Поэтому $|A_\lambda| \overset{\text{п. 2 утв. 3.5}}{=} -A_\lambda \Longrightarrow \widehat{H}_\lambda = Ker\, A = \{0\} \Longrightarrow I_\lambda = I$. ■

**Замечание.** Теорема 5.1 показывает, что семейство ортопроекторов $\{ I_\lambda \}$, определенное формулами (5.3), есть разложение единицы в $H$, сосредоточенное на $[m(A), M(A)+\varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$.

**Определение.** Семейство ортопроекторов $\{ I_\lambda \}$, определенное формулами (5.3), называется *разложением единицы, порожденным оператором* $A$.

# 6. Операторный интеграл

В этой главе рассматриваются различные конструкции операторного интеграла, которые определяются для функций вещественного аргумента по некоторому разбиению единицы в гильбертовом пространстве.

**Определения.** 1. Функцию $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ назовем *простой на* $[a;b]$, если существует такое разбиение

$$\Lambda := \{ \lambda_j \}_{j \in \overline{0,n}} : \; a =: \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n := b$$

отрезка $[a;b]$, что

$$\forall\, j \in \overline{0, n-1} \;\; f(\cdot)|_{(\lambda_j, \lambda_{j+1})} = f_j \in \mathbb{C}. \tag{6.1}$$

2. Класс простых функций на $[a;b]$ обозначим через $\mathcal{S}[a;b]$.

**Замечание.** Отметим, что $\mathcal{S}[a;b]$ — линейное многообразие, лежащее в банаховом пространстве $M[a;b]$ ограниченных на $[a;b]$ функций с нормой $\|f(\cdot)\|_\infty := \max\limits_{\lambda \in [a;b]} |f(\lambda)|$.

**Определение.** Пусть $f \in \mathcal{S}[a;b]$, $\Lambda$ — разбиение отрезка $[a;b]$, удовлетворяющее условию (6.1), а $\{ I_\lambda \}$ — разбиение единицы в гильбертовом пространстве $H$.

*Интегралом от функции* $f$ *по* $\{ I_\lambda \}$ назовем оператор $F \in \mathcal{L}(H)$, определенный следующим образом:

$$F := \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda := \sum_{j=0}^{n-1} f_j (I_{\lambda_{j+1}} - I_{\lambda_j}). \tag{6.2}$$

**Утверждение 6.1.** *Определение* $\int\limits_a^b f(\lambda) d\, I_\lambda$ *от простой на* $[a;b]$ *функции* $f$ *корректно, т. е. не зависит от разбиения* $\Lambda$, *удовлетворяющего условию* (6.1).

**Утверждение 6.2.** *Пусть* $\{ I_\lambda \}$ *— разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$ *и* $f(\cdot)$, $g(\cdot) \in \mathcal{S}[a;b]$.

*Если* $f(\cdot) \overset{\text{п. в.}}{=} g(\cdot)$, *то* $\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda = \int\limits_a^b g(\lambda)\, d\, I_\lambda$.

**Пример 6.1.** Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разбиение единицы в гильбертовом пространстве $H$, $a \leqslant \alpha < \beta < b$, а функция $\eta_{\alpha,\beta}$ определена следующим образом: $\eta_{\alpha,\beta}(\lambda) := \begin{cases} 1, & \lambda \in [\alpha;\beta], \\ 0, & \lambda \notin [\alpha;\beta] \end{cases}$. Тогда

$$\int\limits_a^b \eta_{\alpha,\beta}(\lambda)\, d\, I_\lambda = I_\beta - I_\alpha. \tag{6.3}$$

**Теорема 6.1.** *Пусть* $\{ I_\lambda \}$ *— разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$. *Тогда*:

1. *Если* $C \in \mathbb{C}$, *то* $\int\limits_a^b C\, d\, I_\lambda = C(I_b - I_a)$.
2. *Если* $f \in \mathcal{S}[a;b]$ *и* $I_a = I_b$, *то* $\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda = 0$.
3. *Если* $f \in \mathcal{S}[a;b]$, *то* $Im\left(\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda\right) \subset Im\,(I_b - I_a)$.
4. *Если* $f \in \mathcal{S}[a;b]$ *и* $c \in (a;b)$, *то* $f \in \mathcal{S}[a;c]$, $f \in \mathcal{S}[c;b]$,

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda = \int\limits_a^c f(\lambda)\, d\, I_\lambda + \int\limits_c^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda$$

*и для любого* $x \in H$

$$\Big\| \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda x \Big\|^2 = \Big\| \int\limits_a^c f(\lambda)\, d\, I_\lambda x \Big\|^2 + \Big\| \int\limits_c^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda x \Big\|^2.$$

5. *Если* $f, g \in \mathcal{S}[a;b]$, *то*

$$\int\limits_a^b \big(\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)\big)\, d\, I_\lambda = \alpha \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda + \beta \int\limits_a^b g(\lambda)\, d\, I_\lambda.$$

**Доказательство.** Все эти утверждения есть следствие свойств $\{ I_\lambda \}$ и утверждения 6.1. ■

**Теорема 6.2.** *Пусть* $\{ I_\lambda \}$ *— разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$*. Тогда:*

1. *Если* $f, g \in \mathcal{S}[a;b]$*, то* $f(\cdot)g(\cdot) \in \mathcal{S}[a;b]$ *и*

$$\int\limits_a^b \big(f(\lambda)g(\lambda)\big)\, d\, I_\lambda = \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda \int\limits_a^b g(\lambda)\, d\, I_\lambda.$$

2. *Если* $f \in \mathcal{S}[a;b]$ *и* $[c;d] \subset [a;b]$*, то* $f \in S[c;d]$ *и*

$$\int\limits_c^d f(\lambda)\, d\, I_\lambda = \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda (I_d - I_c).$$

3. *Если* $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$*,* $f \in \mathcal{S}[a;b]$ *и* $g \in S[c;d]$*, то*

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda \int\limits_c^d g(\lambda)\, d\, I_\lambda = 0.$$

*В частности,*

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda (I_d - I_c) = \int\limits_c^d g(\lambda)\, d\, I_\lambda (I_b - I_a) = 0.$$

4. *Если* $f \in \mathcal{S}[a;b]$*, то* $\overline{f} \in \mathcal{S}[a;b]$ *(здесь* $\overline{f}$ *— комплексно сопряженная к* $f$ *функция) и* $\int\limits_a^b \overline{f}(\lambda)\, d\, I_\lambda = \Big(\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda\Big)^*.$

5. *Если* $f \in \mathcal{S}[a;b]$ *и* $Im\, f \subset \mathbb{R}$*, то* $\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda$ *— самосопряженный оператор.*

**Доказательство.** Справедливость всех сформулированных свойств следует из определения интеграла, утверждения 6.1 и равенств (5.1). ■

**Теорема 6.3.** *Пусть* $\{ I_\lambda \}$ — *разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$. *Тогда*:

1. *Если* $f \in \mathcal{S}[a;b]$ *и* $\forall\, \lambda \in [a;b]$ $f(\lambda) \geqslant 0$, *то* $\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda \geqslant 0$.
2. *Если* $f, g \in \mathcal{S}[a;b]$ *и* $\forall\, \lambda \in [a;b]$ $f(\lambda) \geqslant g(\lambda)$, *то*
$$\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda \geqslant \int\limits_a^b g(\lambda)\, d\, I_\lambda.$$
3. *Если* $f \in \mathcal{S}[a;b]$, *то*
$$\Big\| \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda \Big\| \leqslant \max_{\lambda \in [a;b]} |f(\lambda)| \cdot \|I_b - I_a\| \leqslant \max_{\lambda \in [a;b]} |f(\lambda)|.$$
4. *Если* $\{ f_n(\cdot) \} \subset \mathcal{S}[a;b]$ *и* $f_n(\cdot) \rightrightarrows 0$ *на* $[a;b]$, *то*
$$\int\limits_a^b f_n(\lambda)\, d\, I_\lambda \rightrightarrows 0.$$

**Доказательство.** $\boxed{1}$. Это утверждение есть следствие определений разложения единицы и интеграла, а также утверждения 3.2.

$\boxed{3}$. Пусть $x \in H$, $\|x\| \leqslant 1$ и $M = \max\limits_{\lambda \in [a;b]} |f(\lambda)|$. Тогда

$$\Big\| \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda x \Big\|^2 = \Big\| \sum_{j=0}^{n-1} f_j (I_{\lambda_{j+1}} - I_{\lambda_j}) x \Big\|^2 \overset{(5.1)}{=}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} |f_j|^2 \|(I_{\lambda_{j+1}} - I_{\lambda_j}) x\|^2 \leqslant M^2 \sum_{j=0}^{n-1} \|(I_{\lambda_{j+1}} - I_{\lambda_j}) x\|^2 \overset{(5.2)}{=}$$
$$= M^2 \sum_{j=0}^{n-1} \big( \|(I_{\lambda_{j+1}} x\|^2 - \|I_{\lambda_j} x\|^2 \big) = M^2 \big( \|I_b x\|^2 - \|I_a x\|^2 \big) \overset{(5.2)}{=}$$
$$= M^2 \|(I_b - I_a) x\|^2 \leqslant M^2. \ \blacksquare$$

**Лемма 6.1.** *Пусть* $\{ I_\lambda \}$ — *разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$, *а* $\{ f_n(\cdot) \} \subset \mathcal{S}[a;b]$ *такова, что*

*$f_n(\cdot) \rightrightarrows f_0(\cdot)$ на $[a;b]$, где $f_0 : [a;b] \to \mathbb{C}$. Тогда последовательность $\left\{ \int\limits_a^b f_n(\lambda)\,d\,I_\lambda \right\}$ сходится в банаховом пространстве $\mathcal{L}(H)$.*

**Доказательство.** В силу п. 3 теоремы 6.3

$$\left\| \int\limits_a^b f_n(\lambda)\,d\,I_\lambda - \int\limits_a^b f_m(\lambda)\,d\,I_\lambda \right\| \leqslant \max_{\lambda\in[a;b]} |f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тем самым рассматриваемая последовательность фундаментальна в полном нормированном пространстве $\mathcal{L}(H)$. ■

**Замечание.** Лемма 6.1 показывает, что понятие интеграла от простой функции можно расширить до понятия интеграла на замыкании $\mathcal{S}[a;b]$ в пространстве $M[a;b]$.

**Определение.** Замыкание $\mathcal{S}[a;b]$ в пространстве $M[a;b]$ обозначим $\mathcal{I}[a;b]$.

**Замечания.** 1. Отметим, что $\mathcal{I}[a;b]$ — подпространство банахова пространства $M[a;b]$. Поэтому, если $\{ f_n \} \subset \mathcal{I}[a;b]$ такова, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$, то $f \in \mathcal{I}[a;b]$. При этом

$$\forall\, f \in \mathcal{I}[a;b]\ \exists\, \{ f_n \} \subset \mathcal{S}[a;b] \quad f_n \rightrightarrows f \text{ на } [a;b]. \tag{6.4}$$

2. $C[a;b] \subset \mathcal{I}[a;b] \subset M[a;b]$.

**Определение.** Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разбиение единицы в гильбертовом пространстве $H$, $f \in \mathcal{I}[a;b]$ и $\mathcal{S}[a;b] \ni f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$. *Интегралом от $f$ по $\{ I_\lambda \}$* называется оператор

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda := \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(\lambda)\,d\,I_\lambda \in \mathcal{L}(H).$$

**Замечание.** Лемма 6.1 показывает, что если функция $f(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{I}[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda$ существует, а п. 4 теоремы 6.3 показывает, что этот интеграл не зависит от представителя $\{ f_n(\cdot) \} \subset \mathcal{S}[a;b]$ функции $f(\cdot)$.

**Теорема 6.4.** *Пусть* $\{I_\lambda\}$ — *разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$. *Тогда*:

1. *Если* $f \in \mathcal{I}[a;b]$ *и* $I_a = I_b$, *то* $\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda = 0$.

2. *Если* $f \in \mathcal{I}[a;b]$, *то* $Im\left(\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda\right) \subset Im\,(I_b - I_a)$.

3. *Если* $f \in \mathcal{I}[a;b]$ *и* $c \in (a;b)$, *то* $f \in \mathcal{I}[a;c]$, $f \in \mathcal{I}[c;b]$,

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda = \int\limits_a^c f(\lambda)\,d\,I_\lambda + \int\limits_c^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda$$

*и для любого* $x \in H$

$$\left\|\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda x\right\|^2 = \left\|\int\limits_a^c f(\lambda)\,d\,I_\lambda x\right\|^2 + \left\|\int\limits_c^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda x\right\|^2.$$

4. *Если* $f, g \in \mathcal{I}[a;b]$, *то*

$$\int\limits_a^b \big(\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)\big)\,d\,I_\lambda = \alpha\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda + \beta\int\limits_a^b g(\lambda)\,d\,I_\lambda.$$

**Доказательство.** Справедливость утверждений, сформулированных в этой теореме, непосредственно следует из определения интегрируемости и свойств интегралов от простых функций, сформулированных в теореме 6.1. ■

**Теорема 6.5.** *Пусть* $\{I_\lambda\}$ — *разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$. *Тогда*:

1. *Если* $f, g \in \mathcal{I}[a;b]$, *то* $f(\cdot)\cdot g(\cdot) \in \mathcal{I}[a;b]$ *и*

$$\int\limits_a^b \big(f(\lambda)\cdot g(\lambda)\big)\,d\,I_\lambda = \int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda \cdot \int\limits_a^b g(\lambda)\,d\,I_\lambda.$$

2. *Если* $f \in \mathcal{I}[a;b]$ *и* $[c;d] \subset [a;b]$, *то* $f \in \mathcal{I}[c;d]$ *и*

$$\int\limits_c^d f(\lambda)\,d\,I_\lambda = \int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda \cdot (I_d - I_c).$$

3. *Если* $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, $f \in \mathcal{I}[a;b]$ *и* $g \in \mathcal{I}[c;d]$, *то*

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda \cdot \int\limits_c^d g(\lambda)\,d\,I_\lambda = 0.$$

*В частности,*

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda \cdot (I_d - I_c) = \int\limits_c^d g(\lambda)\,d\,I_\lambda \cdot (I_b - I_a) = 0.$$

4. *Если* $f \in \mathcal{I}[a;b]$, *то* $\overline{f} \in \mathcal{I}[a;b]$ *(здесь* $\overline{f}$ *— комплексно сопряженная к* $f$ *функция) и* $\int\limits_a^b \overline{f}(\lambda)\,d\,I_\lambda = \Big(\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda\Big)^{*}$.

5. *Если* $f \in \mathcal{I}[a;b]$ *и* $Im\, f \subset \mathbb{R}$, *то* $\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda$ *— самосопряженный оператор.*

**Доказательство.** Справедливость утверждений, сформулированных в этой теореме, непосредственно следует из определения интегрируемости и соответствующих свойств интегралов от простых функций, сформулированных в теореме 6.2. ■

**Теорема 6.6.** *Пусть* $\{\, I_\lambda \,\}$ *— разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$. *Тогда*:

1. *Если* $f \in \mathcal{I}[a;b]$ *и* $\forall\, \lambda \in [a;b]$ $f(\lambda) \geqslant 0$, *то* $\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda \geqslant 0$.
2. *Если* $f, g \in \mathcal{I}[a;b]$ *и* $\forall\, \lambda \in [a;b]$ $f(\lambda) \geqslant g(\lambda)$, *то*

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda \geqslant \int\limits_a^b g(\lambda)\,d\,I_\lambda.$$

3. *Если* $f \in \mathcal{I}[a;b]$, *то*

$$\Big\| \int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda \Big\| \leqslant \max_{\lambda\in[a;b]} |f(\lambda)| \cdot \|I_b - I_a\| \leqslant \max_{\lambda\in[a;b]} |f(\lambda)|.$$

4. *Если* $\{\, f_n(\cdot) \,\} \subset \mathcal{I}[a;b]$ *и* $f_n(\cdot) \rightrightarrows f$ *на* $[a;b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f_n(\lambda)\,d\,I_\lambda \rightrightarrows \int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda.$$

**Доказательство.** Справедливость утверждений, сформулированных в этой теореме, непосредственно следует из определения интегрируемости и свойств интегралов от простых функций, сформулированных в теореме 6.3.

Кроме этого, при доказательстве п. 1 надо учесть, что если $f \in \mathcal{I}[a;b], \forall\,\lambda \in [a;b]\;\; f(\lambda) \geqslant 0$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$, где $f_n \in \mathcal{S}[a;b]$, то $|f_n| \rightrightarrows f$ на $[a;b]$. ■

Рассмотрим теперь конструкцию операторного интеграла Римана — Стилтьеса.

**Определения.** Пусть $\{\, I_\lambda \,\}$ — разбиение единицы в гильбертовом пространстве $H$, $f \;:\; [a;b] \;\to\; \mathbb{C}$, а $(\Lambda, \Xi)$, где $\Lambda := \{\, \lambda_j \,\}_{j\in\overline{0,n}}$ и $\Xi := \{\, \xi_j \,\}_{j\in\overline{0,n-1}}$ такие, что

$$a \;=:\; \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n := b,\;\; \xi_j \in (\lambda_j, \lambda_{j+1}) \;—$$

*разбиение* $\Lambda$ *отрезка* $[a;b]$ *с отмеченными точками* $\Xi$.

1. *Интегральной суммой функции* $f$*, соответствующей разбиению с отмеченными точками* $(\Lambda, \Xi)$ *и разбиению единицы* $\{\, I_\lambda \,\}$, называется оператор

$$\sigma(\Lambda, \Xi, f, I_\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(I_{\lambda_{j+1}} - I_{\lambda_j}).$$

2. *Мелкостью разбиения* $\Lambda = \{\, \lambda_j \,\}_{j\in\overline{0,n-1}}$ называется величина

$$\delta(\Lambda) := \max_{j\in\overline{0,n-1}} (\lambda_{j+1} - \lambda_j).$$

3. Говорят, что $f$ *интегрируема на* $[a;b]$ *по* $\{\, I_\lambda \,\}$ *в смысле Римана — Стилтьеса*, если

$$\exists\, F \in \mathcal{L}(H)\,\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall\,(\Lambda, \Xi)\;\delta(\Lambda) < \delta \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \|F - \sigma(\Lambda, \Xi, f, I_\lambda)\| < \varepsilon.$$

В этом случае оператор $F$ называется *интегралом Римана — Стилтьеса функции $f$ по разбиению единицы $\{ I_\lambda \}$* и обозначается $\mathcal{R}\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda$.

4. Множество функций, интегрируемых в смысле Римана — Стилтьеса по $\{ I_\lambda \}$, обозначается $\mathcal{R}([a;b];I_\lambda)$.

**Замечание.** Отметим, что простые функции не обязаны быть интегрируемыми в смысле Римана — Стилтьеса.

Пусть $\eta_{\alpha,\beta}$ — функция из примера 6.1. Тогда $\eta_{\alpha,\beta} \in \mathcal{I}[a;b]$, но если $\alpha$ или $\beta$ есть точка разрыва разложения единицы $\{ I_\lambda \}$, то $\eta_{\alpha,\beta} \notin \mathcal{R}([a;b];I_\lambda)$.

**Теорема 6.7.** *Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разбиение единицы в гильбертовом пространстве $H$ и $f : [a;b] \to \mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $f \in \mathcal{R}([a;b];I_\lambda)$.
2. $\exists\, F \in \mathcal{L}(H)\ \forall \{ (\Lambda_k, \Xi_k) \}\ \delta(\Lambda_k) \to 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \sigma(\Lambda_k, \Xi_k, f, I_\lambda) \rightrightarrows F.$$

*При этом $F = \mathcal{R}\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda$.*

**Теорема 6.8.** *Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разбиение единицы в гильбертовом пространстве $H$.*

*Если функция $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ непрерывна на $[a;b]$, то $f \in \mathcal{I}[a;b]$ и $f \in \mathcal{R}([a;b];I_\lambda)$.*

*При этом $\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda = \mathcal{R}\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda$.*

**Доказательство.** Докажем эту теорему для вещественнозначной функции $f$. В общем случае надо рассмотреть вещественную и мнимую части $f$.

1. Пусть $\Lambda := \{ \lambda_j \}_{j \in \overline{0,n-1}}$ — разбиение отрезка $[a;b]$. Определим функции $F^+(\lambda;\Lambda)$ и $F^-(\lambda;\Lambda)$ следующим образом:

$$F^+(\lambda;\Lambda) = \Big\{ M_j := \max_{\lambda \in [\lambda_j;\lambda_{j+1}]} f(\lambda),\ \lambda \in (\lambda_j;\lambda_{j+1}),$$

$$F^-(\lambda;\Lambda) = \Big\{ m_j := \min_{\lambda\in[\lambda_j;\lambda_{j+1}]} f(\lambda),\ \lambda \in (\lambda_j;\lambda_{j+1}).$$

Тогда $F^+(\cdot;\Lambda)$, $F^-(\cdot;\Lambda) \in \mathcal{S}[a;b]$.

Если $\{\,\Lambda_k\,\}$ такова, что $\delta(\Lambda_k)\to 0$, то $F^+(\cdot;\Lambda_k) \rightrightarrows f(\cdot)$ и $F^-(\cdot;\Lambda_k) \rightrightarrows f(\cdot)$ на $[a;b]$. Тем самым $f \in \mathcal{I}[a;b]$ и

$$\begin{aligned} F := \int_a^b f(\lambda)\,d\,I_\lambda = \lim_{k\to+\infty} \int_a^b F^+(\lambda;\Lambda_k)\,d\,I_\lambda = \\ = \lim_{k\to+\infty} \int_a^b F^-(\lambda;\Lambda_k)\,d\,I_\lambda. \end{aligned} \tag{6.5}$$

2. Пусть $\{\,(\Lambda_k,\Xi_k)\,\}$ такова, что $\delta(\Lambda_k)\to 0$. Тогда

$$\int_a^b F^-(\lambda;\Lambda_k)\,d\,I_\lambda = \sigma(\Lambda_k,\Xi_k,F^-(\cdot;\Lambda_k),I_\lambda) \leqslant \sigma(\Lambda_k,\Xi_k,f,I_\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma(\Lambda_k,\Xi_k,F^+(\cdot;\Lambda_k),I_\lambda) = \int_a^b F^+(\lambda;\Lambda_k)\,d\,I_\lambda.$$

Поэтому в силу леммы 3.3 и равенств 6.5 получим

$$\sigma(\Lambda_k,\Xi_k,f,I_\lambda) \rightrightarrows F. \ ■$$

**Пример 6.2.** Пусть $H$ — гильбертово пространство; $H_1$ — его подпространство; $\{0\} \neq H_1 \neq H$; $P := Pr_{H_1}$ — ортопроектор; $I_\lambda$ — разложение единицы, порожденное оператором $P$ (см. пример 5.1).

Пусть $(\Lambda,\Xi)$ — разбиение отрезка $[0;1+\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$ — произвольное малое число) с отмеченными точками, а $i(\Lambda)$ выбрано из условия $1 \in [\lambda_{i(\Lambda)},\lambda_{i(\Lambda)+1})$.

Тогда в силу постоянства $I_\lambda$ на $(0;1]$ и на $(1;1+\varepsilon]$ получим

$$\sigma(\Lambda,\Xi,\lambda,I_\lambda) = \xi_0(I_{\lambda_1} - I_0) + \xi_{i(\Lambda)}(I_{1+\varepsilon} - I_{\lambda_{i(\Lambda)}}) =$$

$$= \xi_0(I-P) + \xi_{i(\Lambda)}\big(I-(I-P)\big) \underset{\delta(\Lambda)\to 0}{\longrightarrow} P.$$

Поэтому $P = \mathcal{R}\int_0^{1+\varepsilon} \lambda\,d\,I_\lambda = \int_0^{1+\varepsilon} \lambda\,d\,I_\lambda$.

**Утверждение 6.3.** *Пусть* $\{ I_\lambda \}$ — *разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$ *и* $f \in C[a;b]$.

1. *Справедливы равенства*

$$\left(\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda x, x\right) = \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\,(I_\lambda x, x) = \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, \|I_\lambda x\|^2, \qquad (6.6)$$

$$\left\| \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda x \right\|^2 = \int\limits_a^b |f(\lambda)|^2\, d\, \|I_\lambda x\|^2, \qquad (6.7)$$

*где скалярные интегралы — это обычные интегралы Римана — Стилтьеса.*

2. *Если* $Im\, f \subset [\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$, *то для любого* $x \in H$ *справедливо неравенство*

$$\alpha \|(I_b - I_a)x\|^2 \leqslant \int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, \|I_\lambda x\|^2 \leqslant \beta \|(I_b - I_a)x\|^2. \qquad (6.8)$$

3. *Если* $Im\, f \subset [0;+\infty)$, *то* $\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, \|I_\lambda x\|^2 \geqslant 0$.

**Доказательство.** $\boxed{1.1}$. Справедливость первого равенства следует из того, что

$$\big(\sigma(\Lambda, \Xi, f, I_\lambda)x, x\big) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(I_{i+1}x - I_i x, x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\big(\|(I_{i+1} - I_i)x\big)\|^2 \overset{(5.2)}{=}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\big(\|(I_{i+1}x\|^2 - \|I_i)x\|^2\big) = \sigma(\Lambda, \Xi, f, \|I_\lambda\|^2),$$

где $\sigma(\Lambda, \Xi, f, \|I_\lambda\|^2)$ — интегральная сумма для интеграла Римана — Стилтьеса $\int\limits_a^b f(\lambda)\, d\, \|I_\lambda x\|^2$.

$\boxed{1.2}$. Аналогично

$$\left\|\sigma(\Lambda,\Xi,f,I_\lambda)x\right\|^2=\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|^2\,\|I_{i+1}x-I_ix\|^2\overset{(5.2)}{=}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|^2\left(\|I_{i+1}x\|^2-\|I_ix\|^2\right)=\sigma(\Lambda,\Xi,|f|^2,\|I_\lambda\|^2).\quad\blacksquare$$

**Замечание.** С другими конструкциями операторного интеграла, например с помощью равенства $Q_F(x)=\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\,\|I_\lambda x\|^2$, можно познакомиться в работах [1–3].

# 7. Спектральное разложение ограниченного самосопряженного оператора

На протяжении всей этой главы рассматриваются: оператор $A \in sa\mathcal{L}(H)$ в гильбертовом пространстве $H$; $\{ I_\lambda \}$ — разложение единицы, порожденное оператором $A$; $\varepsilon$ — произвольное положительное число; числа $m = m(A)$ и $M = M(A)$ (см. (2.7)).

Отметим, что в этом случае разложение единицы $\{ I_\lambda \}$ сосредоточено на $[m; M + \varepsilon]$.

**Теорема 7.1.** *Имеет место равенство*

$$A = \int\limits_m^{M+\varepsilon} \lambda \, d\, I_\lambda. \tag{7.1}$$

**Доказательство.** Пусть $\Lambda := \{ \lambda_i \}_{i \in \overline{0, n-1}}$ и $\Xi := \{ \xi_i \}_{i \in \overline{0, n-1}}$ такие, что

$$m =: \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n := M + \varepsilon, \ \xi_i \in (\lambda_i, \lambda_{i+1}) \text{ —}$$

разбиение $\Lambda$ с отмеченными точками $\Xi$ отрезка $[m; M + \varepsilon]$.

Примем обозначение $\Delta_i I_\lambda := I_{\lambda_{i+1}} - I_{\lambda_i}$. Отметим, что $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \Delta_i I_\lambda = I$.

Тогда в силу неравенства (5.5) для любого $i \in \overline{0, n-1}$ получим

$$\lambda_i \Delta_i I_\lambda \leqslant A \cdot \Delta_i I_\lambda \leqslant \lambda_{i+1} \Delta_i I_\lambda \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow -\delta(\Lambda)\Delta_i I_\lambda \leqslant (\lambda_i - \xi_i)\Delta_i I_\lambda \leqslant (A - \xi_i I) \cdot \Delta_i I_\lambda \leqslant$$
$$\leqslant (\lambda_{i+1} - \xi_i)\Delta_i I_\lambda \leqslant \delta(\Lambda)\Delta_i I_\lambda \overset{\Sigma}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow -\delta(\Lambda)I \leqslant A - \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta_i I_\lambda \leqslant \delta(\Lambda)I \overset{\text{п. 7 утв. 3.2}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \left\| A - \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta_i I_\lambda \right\| \leqslant \delta(\Lambda). \ \blacksquare$$

**Утверждение 7.1.** *Пусть $P$ — полином. Тогда*

$$P(A) = \int_m^{M+\varepsilon} P(\lambda)\, d\, I_\lambda.$$

**Доказательство.** Справедливость этого равенства следует из теорем 6.4 (п. 2) и 6.5 (п. 1). $\blacksquare$

**Определение.** Пусть $f \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$. Оператор $f(A)$ определяется формулой

$$f(A) := \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda)\, d\, I_\lambda.$$

**Замечание.** Оператор $f(A)$ не зависит от положительного числа $\varepsilon$.

**Теорема 7.2.** *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $f, g \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$, то*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ \ (\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A).$$

2. *Если $f, g \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$, то $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.*
3. *Если $f \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$ и $[a; b] \subset [m; M+\varepsilon]$, то*

$$\int_a^b f(\lambda)\, d\, I_\lambda = f(A) \cdot (I_b - I_a).$$

4. *Если $f \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$, то $\overline{f}(A) = f(A)^*$, где $\overline{f}$ — комплексно сопряженная к $f$ функция.*
5. *Если $f \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$ и $Im\, f \subset \mathbb{R}$, то $f(A)$ — самосопряженный оператор.*

6. *Если* $f \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$ *и* $\forall\, \lambda \in [m; M+\varepsilon]$ $f(\lambda) \geqslant 0$, *то* $f(A) \geqslant 0$.

7. *Если* $f, g \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$ *и* $\forall\, \lambda \in [m; M+\varepsilon]$ $f(\lambda) \geqslant g(\lambda)$, *то* $f(A) \geqslant g(A)$.

8. *Если* $f \in \mathcal{I}[m; M+\varepsilon]$, *то* $\|f(A)\| \leqslant \max\limits_{\lambda \in [m; M+\varepsilon]} |f(\lambda)|$.

9. *Если* $\mathcal{I}[m; M+\varepsilon] \ni f_n \rightrightarrows f$ *на* $[m; M+\varepsilon]$, *то*

$$f_n(A) \rightrightarrows f(A).$$

10. *Если функция* $f(x)$ *равна сумме сходящегося на отрезке* $[m-\varepsilon; M+\varepsilon]$ *ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *то* $f(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n A^n$.

**Доказательство.** Справедливость утверждений, сформулированных в этой теореме, непосредственно следует из соответствующих свойств интегралов, сформулированных в теоремах 6.4 — 6.6. ■

**Замечание.** Отметим также, что все операторы вида $f(A)$ перестановочны между собой и с любым линейным ограниченным самосопряженным оператором, перестановочным с $A$.

**Утверждение 7.2.** *Пусть* $\{\, I_\lambda \,\}$ — *разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$, *сосредоточенное на* $[a; b]$, *и* $A := \int\limits_a^b \lambda\, dI_\lambda$. *Тогда* $\{\, I_\lambda \,\}$ — *разбиение единицы, порожденное оператором* $A$.

**Утверждение 7.3.** *Если* $\lambda_0 \notin [m, M]$, *то*

$$(A - \lambda_0 I)^{-1} = \int\limits_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^{-1}\, d\, I_\lambda \tag{7.2}$$

*при достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

**Доказательство.** В силу теоремы 2.4 $\lambda_0 \in \rho(A)$, при этом существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda_0 \notin [m, M+\varepsilon]$. Тем самым функция $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ непрерывна на $[m, M+\varepsilon]$, и остается применить п. 2 теоремы 7.2. ■

**Теорема 7.3.** *Пусть* $\lambda_0 \in [m, M]$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\lambda_0 \in \rho(A)$.
2. $\exists\, (a; b) \subset [m, M]\ \ (\lambda_0 \in (a; b)) \wedge (I_a = I_b)$.

**Доказательство.** $\boxed{\Longrightarrow}$. Так как $\lambda_0 \in \rho(A)$, то по теореме 2.4 $\lambda_0 \in (m, M)$. Поэтому найдутся $a$ и $b$ такие, что

$$\lambda_0 \in (a; b) \subset [m, M] \quad \text{и} \quad (b - a) \cdot \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1. \tag{7.3}$$

Тогда в силу п. 3 теоремы 7.2

$$(A - \lambda_0 I) \cdot (I_b - I_a) = \int\limits_a^b (\lambda - \lambda_0)\, d\, I_\lambda.$$

Умножив это равенство на $(A - \lambda_0 I)^{-1}$, получим

$$I_b - I_a = (A - \lambda_0 I)^{-1} \cdot \int\limits_a^b (\lambda - \lambda_0)\, d\, I_\lambda.$$

Отсюда в силу п. 3 теоремы 6.6

$$\|I_b - I_a\| \leqslant \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| \cdot (b - a) \cdot \|I_b - I_a\|.$$

Поэтому в силу (7.3) имеем $\|I_b - I_a\| = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Так как отображение $I_\lambda$ монотонно, то $I_\lambda$ — константа на $[a_1; b_1]$ таком, что $a < a_1 < \lambda_0 < b_1 < b$. Поэтому

$$\begin{aligned} A - \lambda_0 I = \int\limits_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)\, d\, I_\lambda = \\ = \int\limits_m^a (\lambda - \lambda_0)\, d\, I_\lambda + \int\limits_b^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)\, d\, I_\lambda. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Пусть

$$F_1 := \int\limits_m^a (\lambda - \lambda_0)^{-1}\, d\, I_\lambda \in \mathcal{L}(H) \text{ и}$$

$$F_2 := \int\limits_b^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^{-1}\, d\, I_\lambda \in \mathcal{L}(H).$$

Тогда в силу теоремы 6.5 справедливы равенства

$$F_1\int\limits_m^a(\lambda-\lambda_0)\,d\,I_\lambda=I_a-I_m,\quad F_1\int\limits_b^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)\,d\,I_\lambda=0,$$
$$F_2\int\limits_m^a(\lambda-\lambda_0)\,d\,I_\lambda=0,\qquad\quad F_2\int\limits_b^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)\,d\,I_\lambda=I_{M+\varepsilon}-I_b.$$

Таким образом, в силу (7.4) и равенства $I_{a_1}=I_{b_1}$ имеем

$$(F_1+F_2)\cdot(A-\lambda_0 I)=I_a-I_m+I_{M+\varepsilon}-I_b=I_{M+\varepsilon}-I_m=I.$$

Тем самым $F_1+F_2=(A-\lambda_0 I)^{-1}$. ∎

**Замечание.** Теорема 7.3 показывает, что $\lambda_0\in\rho(A)$ тогда и только тогда, когда $I_\lambda$ постоянно в некоторой окрестности точки $\lambda_0$, т. е. $\lambda_0$ есть *точка локального постоянства отображения* $I_\lambda$.

**Теорема 7.4.** $\lambda_0\in\sigma_d(A)\Longleftrightarrow\lambda_0\in[m,M]\wedge I_{\lambda_0}\neq I_{\lambda_0+0}$.

**Доказательство.** $\boxed{\Longrightarrow}$. 1. Пусть $x_0\neq 0$ и $Ax_0=\lambda_0x_0$, тогда $(A-\lambda_0I)x_0=A_{\lambda_0}x_0=0\overset{\text{п. 1 теор. 5.1}}{\Longrightarrow}I_{\lambda_0}x_0=0$.

2. Поскольку $(A-\lambda_0I)^2x_0=0$, то

$$0=\big((A-\lambda_0I)^2x_0,x_0\big)=\int\limits_m^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2\,d\,\|I_\lambda x_0\|^2.$$

Так как $\forall\,a,b\in[m,M+\varepsilon]$ $\int\limits_a^b(\lambda-\lambda_0)^2\,d\,\|I_\lambda x_0\|^2\geqslant 0$, то для любого достаточно малого $\delta>0$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\lambda_0+\delta}^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2\,d\,\|I_\lambda x_0\|^2=0.$$

Но $\int\limits_{\lambda_0+\delta}^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2\,d\,I_\lambda\overset{\text{п. 2 теор. 6.3}}{\geqslant}\delta^2(I_{M+\varepsilon}-I_{\lambda_0+\delta})$, поэтому

$$0=\int\limits_{\lambda_0+\delta}^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2\,d\,\|I_\lambda x_0\|^2\geqslant\delta^2\|(I_{M+\varepsilon}-I_{\lambda_0+\delta})x_0\|^2\geqslant 0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I_{M+\varepsilon}\, x_0 = x_0 = I_{\lambda_0+\delta}\, x_0 \Longrightarrow I_{\lambda_0+0}\, x_0 = x_0 \neq 0 \overset{1}{=} I_{\lambda_0}\, x_0.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$. 3. Так как отображение $I_\lambda$ не убывает и $I_{\lambda_0} \neq I_{\lambda_0+0}$, то $I_{\lambda_0+0} - I_{\lambda_0}$ — ортопроектор.

4. Пусть $H_0$ — подпространство гильбертова пространства такое, что $I_{\lambda_0+0} - I_{\lambda_0} = Pr_{H_0}$ и $0 \neq x_0 \in H_0$. Тогда

$$x_0 = (I_{\lambda_0+0} - I_{\lambda_0})x_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I_{\lambda_0+0}x_0 = I_{\lambda_0+0}(I_{\lambda_0+0} - I_{\lambda_0})x_0 = (I_{\lambda_0+0} - I_{\lambda_0})x_0 = x_0, \text{ т. е.}$$

$$I_{\lambda_0+0}\, x_0 = x_0, \text{ а } I_{\lambda_0}\, x_0 = 0.$$

В силу монотонности отображения $I_\lambda$ получим

$$\forall\, \lambda \leqslant \lambda_0 \;\; I_\lambda x_0 = I_\lambda(I_{\lambda_0} x_0) = 0 \text{ и}$$
$$\forall\, \lambda > \lambda_0 \;\; I_\lambda x_0 = I_\lambda(I_{\lambda_0+0} x_0) = I_{\lambda_0+0} x_0 = x_0.$$

5. Поэтому для любого достаточно малого $\delta > 0$ имеем

$$0 \leqslant \|(A - \lambda_0 I)x_0\|^2 = \int\limits_m^{M+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\,\|I_\lambda x_0\|^2 =$$

$$= \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\delta} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\,\|I_\lambda x_0\|^2 \leqslant \delta^2 \|x_0\|^2 \to 0 \text{ при } \delta \to 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Ax_0 = \lambda_0 x_0. \;\; \blacksquare$$

В силу теоремы 7.3

$$[m; M] \setminus \sigma(A) = \bigcup_{k \geqslant 1} (a_k; b_k), \tag{7.5}$$

где $\{(a_k; b_k)\}$ — не более чем счетное семейство попарно не пересекающихся интервалов постоянства $\{I_\lambda\}$ и $a_k, b_k \in \sigma(A)$.

В силу п. 1 теоремы 6.4 если $[\widetilde{a}_k; \widetilde{b}_k] \subset (a_k; b_k)$, то справедливо равенство $\int\limits_{\widetilde{a}_k}^{\widetilde{b}_k} f(\lambda) d\, I_\lambda = 0$. Это позволяет выдвинуть гипотезу, что $f(A)$, где $f \in C[m; M]$, продолженная на $(m - \varepsilon; M + \varepsilon)$ по непрерывности, зависит только от значений $f$ на $\sigma(A)$.

Дальнейшая часть главы 7 посвящена доказательству этой гипотезы и следствиям из нее.

**Замечание.** Отметим, что любую функцию $f$, определенную и непрерывную на $\sigma(A)$, можно продолжить по непрерывности на $[m-\varepsilon; M+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, положив $f(\lambda) = f(m)$ при $\lambda < m$ и $f(\lambda) = f(M)$ при $\lambda > M$, а затем продолжить по линейности на $(a_k; b_k)$.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и введем обозначение

$$\sigma_\delta := \sigma(A) + [-\delta; \delta], \quad \delta > 0. \tag{7.6}$$

Отметим, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$) имеет место включение

$$\sigma_\delta \subset (m-\varepsilon; M+\varepsilon). \tag{7.7}$$

Далее будем использовать только $\delta > 0$, удовлетворяющие соотношению (7.7).

Для удобства дальнейших рассуждений будем считать, что интервалы из равенства (7.5) занумерованы в порядке невозрастания их длин: $(b_k - a_k) \geqslant (b_{k+1} - a_{k+1})$. Это можно сделать в силу того, что если множество интервалов бесконечно, то для любого $\alpha > 0$ среди этих интервалов есть лишь конечное число таких, чьи длины не меньше $\alpha$ (ибо множество $[m; M+\varepsilon]$ ограничено).

Отметим, что при $0 < \delta < \varepsilon$

$$[m; M] \setminus \sigma_\delta = \bigcup_{k=1}^{k(\delta)} (a_{k,\delta}; b_{k,\delta}), \tag{7.8}$$

где $a_{k,\delta} = a_k + \delta$, а $b_{k,\delta} = b_k - \delta$ (при условии $2\delta < (b_k - a_k)$). При этом $I_{a_{k,\delta}} = I_{b_{k,\delta}}$.

В силу (7.8) множество $\sigma_\delta$ есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся отрезков. Поэтому в силу п. 1

и 3 теоремы 6.4 можно говорить об интеграле $\int\limits_{\sigma_\delta} f(\lambda)d\,I_\lambda$. При этом

$$\forall\,\delta \in (0;\varepsilon)\ \forall\, f \in C[m;M]\ f(A) = \int\limits_{\sigma_\delta} f(\lambda)d\,I_\lambda. \tag{7.9}$$

**Теорема 7.5.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство;* $A \in sa\mathcal{L}(H)$; $\{I_\lambda\}$ *— разложение единицы, порожденное оператором* $A$; $f, g \in C[m-\varepsilon; M+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*:

1. $\|f(A)\| = \|f(\cdot)\|_{C(\sigma(A))} = \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)|$.
2. $\big(f(A) = g(A)\big) \Longleftrightarrow \Big(f(\lambda) \underset{\lambda\in\sigma(A)}{=} g(\lambda)\Big)$.
3. $\Big(0 \in \rho(f(A))\Big) \Longleftrightarrow \Big(\min\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)| > 0\Big)$.
4. $\sigma\big(f(A)\big) = f\big(\sigma(A)\big)$.

**Доказательство.** $\boxed{1}$. 1.1. Поскольку

$$f(A) \overset{(7.9)}{=} \sum_{m=1}^{m(\delta)} \int\limits_{c_m(\delta)}^{d_m(\delta)} f(\lambda)d\,I_\lambda,$$

где все $[c_m(\delta); d_m(\delta)] \subset \sigma_\delta \subset [m-\varepsilon; M+\varepsilon]$, то для любого $x \in H$ в силу п. 3 теоремы 6.4

$$\|f(A)x\|^2 = \sum_{m=1}^{m(\delta)} \int\limits_{c_m(\delta)}^{d_m(\delta)} |f(\lambda)|^2 d\,\|I_\lambda x\|^2 \overset{(6.8)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \max_{\lambda\in\sigma_\delta} |f(\lambda)|^2 \sum_{m=1}^{m(\delta)} \|I_\lambda x\|^2 \leqslant \max_{\lambda\in\sigma_\delta} |f(\lambda)|^2 \cdot \|x\|^2.$$

Тем самым

$$\forall\,\delta \in (0;\varepsilon)\ \ \|f(A)\| \leqslant \|f(\cdot)\|_{C(\sigma_\delta)}. \tag{7.10}$$

1.2. Пусть $\lambda \in \sigma_\delta$. Тогда $\lambda = \lambda_\sigma + \lambda_\delta$, где $\lambda_\sigma \in \sigma(A)$, а $|\lambda_\delta| \leqslant \delta$. Поэтому

$$|f(\lambda)| \leqslant |f(\lambda_\sigma)| + |f(\lambda) - f(\lambda_\sigma)| \leqslant |f(\lambda_\sigma)| + \omega(\delta; f), \tag{7.11}$$

где $\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции $f$ на $[m-\varepsilon; M+\varepsilon]$, т. е. $\omega(\delta; f) = \sup\limits_{\lambda_1, \lambda_2 \in [m-\varepsilon; M+\varepsilon],\, |\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant \delta} \bigl|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\bigr|$.

Тем самым

$$\|f(\cdot)\|_{C(\sigma_\delta)} \leqslant \|f(\cdot)\|_{C(\sigma(A))} + \omega(\delta; f). \tag{7.12}$$

Поскольку в силу теоремы Кантора функция $f$ равномерно непрерывна на $[m-\varepsilon; M+\varepsilon]$, то $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta; f) = 0$. Поэтому из неравенств (7.10) и (7.12) получим

$$\|f(A)\| \leqslant \|f(\cdot)\|_{C(\sigma(A))}. \tag{7.13}$$

1.3. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(A)$ и $|f(\lambda_0)| = \|f(\cdot)\|_{C(\sigma(A))} > 0$. Тогда в силу теоремы 7.3 существует $\{\,\delta_m\,\}$ такая, что $\delta_n \to +0$ и $I_{\lambda_0} \neq I_{\lambda_0 + \delta_n}$.

Возьмем $x_n \in Im\,(I_{\lambda_0+\delta_n} - I_{\lambda_0})$ такой, что $\|x_n\| = 1$. Тогда в силу неравенства (7.11)

$$\forall\, \lambda \in [\lambda_0; \lambda_0 + \delta_n]\ \ |f(\lambda)| \geqslant |f(\lambda_0)| - \omega(\delta_n; f) > 0$$

при достаточно больших $n$. Поэтому

$$\|f(A)x_n\|^2 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\delta_n} |f(\lambda)|^2 \|I_\lambda x_n\|^2 \overset{(6.8)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \bigl(|f(\lambda_0)| - \omega(\delta_n; f)\bigr)^2 \|x_n\|^2 \to |f(\lambda_0)|^2.$$

Тем самым $\|f(A)\| \geqslant \|f(\cdot)\|_{C(\sigma(A))}$, что вместе с неравенством (7.13) дает нужное равенство $\|f(A)\| = \|f(\cdot)\|_{C(\sigma(A))}$.

$\boxed{2}$. $\|f(A) - g(A)\| \overset{1}{=} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{C(\sigma(A))}$.

$\boxed{3 \Longrightarrow}$. Пусть существует $\lambda_0 \in \sigma(A)$ такое, что $f(\lambda_0) = 0$. Для любого $\delta \in (0; \varepsilon)$ возьмем $x_\delta \in Im\,(I_{\lambda_0+\delta} - I_{\lambda_0})$ такое, что $\|x_\delta\| = 1$. Тогда

$$\|f(A)x_\delta\|^2 = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\delta} |f(\lambda)|^2 \|I_\lambda x_0\|^2 \overset{(6.8),\,(7.11)}{\leqslant} \omega(\delta; f)^2 \|x_\delta\|^2 \to 0$$

при $\delta \to +0$. Поэтому в силу утверждения 2.1 оператор $f(A)$ не является строго отделенным от нуля и $0 \in \sigma(f(A))$.

$\boxed{3 \Longleftarrow}$. Пусть $\min\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| > 0$. Рассмотрим функцию

$$q(\lambda) := \begin{cases} \dfrac{1}{f(\lambda)}, \ \lambda \in \sigma(A) \\ \text{линейна на } [a_k; b_k] \text{ из (7.5).} \end{cases}$$

Тогда $q \in C[m; M]$ и $f(\lambda)\, q(\lambda) \underset{\lambda \in \sigma(A)}{=} 1$. Поэтому в силу п. 1 теоремы 6.5 $f(A)\, q(A) = I$.

$\boxed{4}$. $\lambda \notin \sigma(f(A)) \Longleftrightarrow \lambda \in \rho(f(A)) \Longleftrightarrow 0 \in \rho(f(A) - \lambda I) \overset{3}{\Longleftrightarrow}$ $\Longleftrightarrow \lambda \notin f(\sigma(A))$. ■

# 8. Неограниченные линейные операторы

В этой главе рассматриваются линейные операторы общего вида, для которых определяются арифметические операции и операция сопряжения.

**Определения.** Пусть $H$ — гильбертово пространство.

1. Множество всех линейных операторов, действующих в $H$ (т. е. $D(A) \subset H$, $Im\, A \subset H$) будем обозначать $\mathfrak{L}(H)$.

Пусть $A$, $B \in \mathfrak{L}(H)$.

2. Оператор $A$ называется *расширением оператора* $B$, а оператор $B$ — *сужением оператора* $A$, если

$$D(A) \supset D(B) \text{ и } A|_{D(B)} = B.$$

Это записывается следующим образом: $A \supset B$ или $B \subset A$.

3. $D(A+B) := D(A) \cap D(B)$, $(A+B)x := Ax + Bx$.

4. Если $\lambda \neq 0$, то $D(\lambda A) := D(A)$, $(\lambda A)x := \lambda Ax$.
   Если $\lambda = 0$, то $D(0A) := H$, $0A := 0$.

5. $D(AB) := \{\, x \in D(B) : \; Bx \in D(A) \,\}$, $(AB)x := A(Bx)$.

6. Если $Ker\, A = \{0\}$, то $D(A^{-1}) := Im\, A$,

$$Im\, A^{-1} = D(A) \text{ и } Ax = y \Longleftrightarrow x = A^{-1}y.$$

**Замечание.** Отметим, что $0 \supset A - A$ .

**Утверждение 8.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$ и $A, B, C \in \mathfrak{L}(H)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda A$.
4. $(\lambda + \mu)A \supset \lambda A + \mu A$.

5. $(A+B)C = AC + BC$.

6. $A(B+C) \supset AB + AC$.

**Пример 8.1.** Пусть $H$ — гильбертово пространство; $e \in H$; $0 \neq e$; $A \in \mathfrak{L}(H)$: $D(A) := \langle e \rangle$; $B = I$; $C = Pr_{\langle e \rangle} - I$. Тогда $Im\,(B+C) = \langle e \rangle$. Поэтому $D\big(A(B+C)\big) = H$. Поскольку $D(AB) = D(A) \neq H$, то $D\big(A(B+C)\big) \neq D\big(AB+AC\big)$.

**Утверждение 8.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$. Если $A$ непрерывен на $D(A)$, то существует $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(H)$ такой, что $A \subset \widetilde{A}$.*

**Доказательство.** Сначала надо продолжить $A$ по непрерывности на подпространство $\overline{D(A)}$, а потом, например, положить $\widetilde{A}$ на $\big(\overline{D(A)}\big)^{\perp}$ равным 0. ∎

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$.

*Графиком $Gr(A)$ оператора $A$* называется множество

$$Gr(A) := \{\, (x; Ax) \in H^2 : x \in D(A) \,\}.$$

Здесь $H^2$ — произведение $H$ на $H$, которое само является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $\big((x_1; y_1), (x_2; y_2)\big) := (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$.

**Утверждение 8.3.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A$, $B \in \mathfrak{L}(H)$. Тогда*

$$A \subset B \Longleftrightarrow Gr(A) \subset Gr(B).$$

**Определения.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$.

1. Оператор $A$ называется *замкнутым*, если из того, что $D(A) \ni x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$, следует $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$.

Множество замкнутых линейных операторов, действующих в $H$, будем обозначать $cl\mathfrak{L}(H)$.

2. Будем говорить, что *оператор $A$ строго отделен от нуля*, если

$$\exists\, c > 0\, \forall\, x \in D(A) \;\; ||Ax|| \geqslant c\, ||x||. \tag{8.1}$$

**Теорема 8.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A, B \in \mathfrak{L}(H)$. Тогда справедливы следующие утверждения* (см., например, [7, 8]):

1. $(A \in cl\mathfrak{L}(H) \Longleftrightarrow (Gr(A)$ *— замкнутое множество в* $H^2)$.
2. *Если* $A \in \mathcal{L}(H)$, *то* $A \in cl\mathfrak{L}(H)$.
3. *Если* $A \in cl\mathfrak{L}(H)$ *и* $D(A) = H$, *то* $A \in \mathcal{L}(H)$ (теорема Банаха о замкнутом операторе).
4. *Если* $A \in cl\mathfrak{L}(H)$ *и* $D(A)$ *— замкнутое множество, то существует* $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(H)$ *такой, что* $A \subset \widetilde{A}$.
5. *Если* $A \in \mathcal{L}(H)$ *и* $Ker\, A = \{0\}$, *то* $A^{-1} \in cl\mathfrak{L}(H)$.
6. *Если* $A \in \mathcal{L}(H)$ *и* $B \in cl\mathfrak{L}(H)$, *то* $(A + B) \in cl\mathfrak{L}(H)$.
7. *Если* $\rho(A) \neq \varnothing$, *то* $A \in cl\mathfrak{L}(H)$.
8. *Если* $A \in cl\mathfrak{L}(H)$, *то* $Ker\, A$ *— замкнутое множество, т. е. подпространство пространства* $H$. ■

Аналогом утверждения 2.1 является следующее утверждение.

**Утверждение 8.4.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$. Тогда*:

1. ($A$ *не является строго отделенным от нуля*) $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \Big(\exists\, \{x_n\} \subset D(A)\; \big((\|x_n\| = 1) \wedge (Ax_n \to 0)\big)\Big).$$

2. *Если* $0 \in \rho(A)$, *то $A$ строго отделен от нуля.*
3. *Если $A$ строго отделен от нуля, то* $Ker\, A = \{0\}$.
4. *Если $A$ строго отделен от нуля, то*

$$(Im\, A \text{ — подпространство пространства } H) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (A \in cl\mathfrak{L}(H)).$$

**Доказательство.** $\boxed{4. \Longrightarrow}$. Пусть

$$D(A) \ni x_n \to x_0 \text{ и } Ax_n \to y_0.$$

Тогда $y_0 \in Im\, A \Longrightarrow \exists\, \widehat{x} \in D(A)\ y_0 = A\widehat{x} \overset{(8.1)}{\Longrightarrow} x_n \to \widehat{x} \Longrightarrow x_0 = \widehat{x}$.

$\boxed{4. \Longleftarrow}$. Пусть $Im\, A \ni y_n \to y_0$.

Тогда найдется $\{ x_n \} \subset D(A)$ такая, что $y_n = Ax_n$. В силу условия (8.1) последовательность $\{ x_n \}$ фундаментальна. Поэтому существует $x_0 \in H$ такой, что $x_n \to x_0$. В силу замкнутости оператора $A$ получим, что $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$. ■

**Пример 8.2.** Рассмотрим оператор $A$ с областью определения $D(A) := C^1[-\pi; \pi]$, действующий по формуле $Ax(t) := \frac{d}{dt}x(t)$ как оператор в гильбертовом пространстве $L_2(-\pi; \pi)$. Этот оператор является неограниченным и незамкнутым оператором.

1. Неограниченность. Если $x_n(t) = \sin(nt)$, то $\|x_n(\cdot)\| \leqslant 2\pi$. Но

$$Ax_n(t) = n\cos(nt) \text{ и } \|Ax_n(\cdot)\| = n\sqrt{\pi} \to \infty.$$

2. Незамкнутость. Пусть $x_n(t) = \sqrt{t^2 + 1/n}$.
Тогда $x_n(t) \rightrightarrows |t| \notin D(A)$ на $[-\pi; \pi]$, поскольку

$$\left| \sqrt{t^2 + 1/n} - |t| \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2t^2 + n} + n|t|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Но

$$Ax_n(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1/n}} \underset{L_2(-\pi;\pi)}{\longrightarrow} \operatorname{sign}(t) \in L_2(-\pi; \pi).$$

**Пример 8.3.** Пусть $A \in cl\mathfrak{L}(H) \setminus \mathcal{L}(H)$, $D(A) \neq \overline{D(A)} = H$, а $B := -A$. Тогда $B \in cl\mathfrak{L}(H)$, а $(A + B)$ есть оператор, определенный на $D(A) \neq H = \overline{D(A)}$, и $(A + B)\big|_{D(A)} = 0$. Тем самым оператор $(A + B)$ не является замкнутым.

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$.

Говорят, что *оператор $A$ допускает замыкание*, если существует $\widetilde{A} \in cl\mathfrak{L}(H)$ такой, что $A \subset \widetilde{A}$.

**Утверждение 8.5.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$. Оператор $A$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда $\overline{Gr(A)}$ не содержит точек вида $(0; y) \neq (0; 0)$.*

*При этом $\overline{Gr(A)}$ есть график минимального замкнутого оператора среди всех замкнутых расширений оператора $A$.*

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$ — оператор, допускающий замыкание.

Оператор $\overline{A} \in cl\mathfrak{L}(H)$ такой, что $Gr(\overline{A}) = \overline{Gr(A)}$, называется *замыканием оператора $A$*.

**Пример 8.4** (пример оператора, не допускающего замыкания). Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство, а $\{ e_n \}$ — его ортонормированный базис. Оператор $A$ определим следующим образом:

$$D(A) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle e_1, \ldots, e_n \rangle, \text{ а } Ae_n := ne_1.$$

Тогда $Gr(A) \ni (e_n/n; e_1) \to (0; e_1) \in \overline{Gr(A)}$.

**Определения.** Пусть $H$ — гильбертово пространство.

1. Оператор $A \in \mathfrak{L}(H)$ называется *плотно определенным*, если $\overline{D(A)} = H$. Множество линейных плотно определенных операторов, действующих в $H$, обозначим $drd\mathfrak{L}(H)$.

2. Если $A \in drd\mathfrak{L}(H)$, то оператор $A^* : D(A^*) \subset H \to H$, называемый *сопряженным к $A$*, определяется следующим образом:

1) Областью определения $D(A^*)$ оператора $A^*$ являются те элементы $y \in H$, для которых функционал $\big(A(\cdot), y\big)$ непрерывен на $D(A)$.

2) На $D(A^*)$ оператор $A^*$ действует следующим образом:

$$\forall\, x \in D(A)\ \forall\, y \in D(A^*)\ \ (Ax, y) = (x, A^*y). \tag{8.2}$$

**Замечания.** 1. Плотность $D(A)$ в $H$ нужна для того, чтобы $A^*y$ определялся соотношением (8.2) однозначно.

2. Отметим, что всегда $0 \in D(A^*)$ и

$$\forall\, x \in D(A)\ \forall\, y \in D(A^*) \quad (A^*y, x) = (y, Ax).$$

**Пример 8.5.** Покажем, что область определения оператора $A^*$ может равняться $\{0\}$.

Пусть $\{\, e_n \,\}$ — стандартный базис в $l_2$, т. е. $e_n = \{\delta_{in}\}$, а $\{\, f_{n,m} \,\}$ — тот же базис, разбитый на счетное число счетных подмножеств. Определим оператор $A$ следующим образом:

$$D(A) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle e_1, \ldots, e_n \rangle, \text{ а } Af_{n,m} = me_n.$$

Пусть $0 \neq y = \{\xi_n\}$. Тогда найдется такое $\widehat{n} \in \mathbb{N}$, что $\xi_{\widehat{n}} \neq 0$. Поэтому $(Af_{\widehat{n},m}, y) = m\xi_{\widehat{n}} \to \infty \Longrightarrow y \notin D(A^*) \Longrightarrow D(A^*) = \{0\}$.

**Пример 8.6.** Рассмотрим линейные многообразия

$$M_1 := \mathbb{R}[t] \text{ и } M_2 := \{\, \sin(nt), \cos(mt) : \ n, m \in \mathbb{N} \,\}$$

в гильбертовом пространстве $H := L_2(-\pi; \pi)$ над полем $\mathbb{R}$. Тогда $\overline{M_1} = H$ и $\overline{M_2} = H$, но $M_1 \cap M_2 = \mathbb{R}$. Тем самым пересечение двух всюду плотных линейных многообразий может не быть всюду плотным линейным многообразием.

**Утверждение 8.6.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A, B \in drd\mathfrak{L}(H)$. Тогда*:

1. *$A^* \in cl\mathfrak{L}(H)$.*
2. *$\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\ (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.*
3. *Если $A \subset B$, то $B^* \subset A^*$.*
4. *Если $(A + B) \in drd\mathfrak{L}(H)$, то $(A + B)^* \supset A^* + B^*$.*
5. *Если $A \in \mathcal{L}(H)$, то $(A + B)^* = A^* + B^*$.*
6. *Если $(AB) \in drd\mathfrak{L}(H)$, то $(AB)^* \supset B^* A^*$.*
7. *Если $A \in \mathcal{L}(H)$, то $(AB)^* = B^* A^*$.*

**Доказательство.** $\boxed{1}$. Линейность оператора $A^*$ очевидна. Докажем его замкнутость. Пусть $D(A^*) \ni y_n \to y_0$ и $A^* y_n \to z$. Тогда в силу (8.2)

$$\forall\, x \in D(A)\ \ (Ax, y_n) = (x, A^* y_n).$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$\forall\, x \in D(A)\ \ (Ax, y_0) = (x, z).$$

Тем самым линейный функционал $\bigl(A(\cdot), y_0)\bigr)$ непрерывен на $D(A)$, т. е. $y_0 \in D(A^*)$ и $z = A^* y_0$.

$\boxed{5}$. В этом случае $D(A+B) = D(B)$ и $D(A^*+B^*) = D(B^*)$. Но функционал $((A+B)x, y)$ непрерывен по $x$ на $D(B)$ тогда и только тогда, когда функционал $(Bx, y)$ непрерывен по $x$ на $D(B)$. Тем самым $D((A+B)^*) = D(B^*) = D(A^* + B^*)$.

$\boxed{7}$. В этом случае $D(AB) = D(B)$. Но функционал $((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y)$ непрерывен по $x$ на $D(B)$ тогда и только тогда, когда $A^* y \in D(B^*)$. Тем самым $D((AB)^*) = D(B^* A^*)$. ■

**Пример 8.7.** Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in \mathfrak{L}(H)$ и $D(A^*) \neq H$. Тогда $D((A + (-A))^*) = H$, а $D(A^* + (-A)^*) = D(A^*) \neq H$, т. е. $(A + (-A))^* \neq A^* + (-A)^*$.

**Пример 8.8.** Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in \mathfrak{L}(H)$ и $D(A^*) \neq H$. Тогда $D((A0)^*) = D(0) = H$, а $D(0^* A^*) = D(A^*) \neq H$, т. е. $(A0)^* \neq 0^* A^*$.

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство. Через $J$ обозначим линейный оператор $J : H^2 \to H^2$, определенный формулой $J\bigl((x; y)\bigr) := (y; -x)$.

**Утверждение 8.7.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, а $M$ — линейное многообразие в $H^2$. Тогда:*

1. *$J$ — изометрия.*

2. $J^2 = -I$.
3. $J^* = -J = J^{-1}$.
4. $\overline{J(M)} = J\big(\overline{M}\big)$.
5. $J(M^\perp) = J(M)^\perp$.

**Теорема 8.2.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство, а* $A \in drd\mathfrak{L}(H)$. *Тогда*:

1. *Справедливы равенства*

$$Gr(A^*) = J\big(Gr(A)\big)^\perp, \tag{8.3}$$

$$\overline{Gr(A)} = J\big(Gr(A^*)\big)^\perp, \tag{8.4}$$

$$Ker\, A^* = (Im\, A)^\perp. \tag{8.5}$$

2. *Если* $A$ *— замкнутый оператор, то*

$$H^2 = Gr(A) \oplus J\big(Gr(A^*)\big). \tag{8.6}$$

**Доказательство.** $\boxed{1}$. 1.1. $\Big((y;z) \in J\big(Gr(A)\big)^\perp\Big) \Longleftrightarrow$.

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall\, x \in D(A)\ 0 = \big(J((x;Ax)),(y,z)\big) = (Ax,y) - (x,z)\Big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall\, x \in D(A)\ (Ax,y) = (x,z)\Big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Big(\big(y \in D(A^*)\big) \wedge \big(z = A^*y\big)\Big) \Longleftrightarrow \Big((y;z) \in Gr(A^*)\Big).$$

1.2. $J\big(Gr(A^*)\big)^\perp \overset{(8.3)}{=} J\Big(J\big(Gr(A)\big)^\perp\Big)^\perp \overset{\text{п. 5 утв. 8.7}}{=}$

$$= J\Big(J\big(Gr(A)\big)^{\perp\perp}\Big) = J\Big(\overline{J\big(Gr(A)\big)}\Big) \overset{\text{п. 2 утв. 8.7}}{=}$$

$$= \overline{J^2\big(Gr(A)\big)} \overset{\text{п. 3 утв. 8.7}}{=} \overline{-Gr(A)} = \overline{Gr(A)}.$$

1.3. Имеет место следующая цепочка эквивалентных утверждений:

$$\big(y \in Ker\, A^*\big) \Longleftrightarrow \Big((y;0) \in Gr(A^*) \overset{(8.3)}{=} J\big(Gr(A)\big)^\perp\Big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall\, x \in D(A)\ \ 0 = \big((y;0),(Ax;-x)\big) = (y, Ax)\Big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \big(y \in Im\, A^{\perp}\big). \ \blacksquare$$

**Утверждение 8.8.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in drd\mathfrak{L}(H)$. Если $Ker\, A = \{0\}$ и $\overline{Im\, A} = H$, то*

$$Ker\, A^* = \{0\} \text{ и } (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

**Доказательство.** 1. Для любых $x \in D(A)$ и $y \in D((A^{-1})^*)$ имеем

$$(x, y) = (A^{-1}(Ax), y) = (Ax, (A^{-1})^* y).$$

Это показывает, что $(A^{-1})^* y \in D(A^*)$ и $y = A^*((A^{-1})^* y)$.

2. Аналогично для $x \in D(A^{-1})$ и $y \in D(A^*)$ имеем

$$(x, y) = (A(A^{-1}x), y) = (A^{-1}x, A^* y).$$

Это показывает, что $A^* y \in D((A^{-1})^*)$ и $y = (A^{-1})^*(A^* y)$.

**Теорема 8.3.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in drd\mathfrak{L}(H)$. Оператор $A$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда $A^* \in drd\mathfrak{L}(H)$.*

*При этом $\overline{A} = A^{**}$.*

**Доказательство.** $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $H_0 := \overline{D(A^*)} \neq H$, $y_0 \in H_0^{\perp}$ и $y_0 \neq 0$. Тогда для любого $y \in D(A^*)$ справедливы равенства

$$\big(J(y; A^* y), (0; y_0)\big) = \big((A^* y; -y), (0; y_0)\big) = -(y_0, y) = 0.$$

Тем самым

$$(0; y_0) \in J\big(Gr(A^*)\big)^{\perp} \overset{(8.4)}{=} \overline{Gr(A)}.$$

Последнее соотношение в силу утверждения 8.5 означает, что оператор $A$ не допускает замыкания.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Так как $\overline{D(A^*)} = H$, то существует $A^{**}$. Тогда

$$Gr(A^{**}) \overset{(8.3)}{=} J\big(Gr(A^*)\big)^{\perp} \overset{(8.4)}{=} \overline{Gr(A)}. \quad \blacksquare$$

**Следствия.** *Пусть $H$ – гильбертово пространство и $A \in drd\mathfrak{L}(H)$. Тогда*:

1. *Если $A \in cl\mathfrak{L}(H)$, то $A^* \in drd\mathfrak{L}(H)$ и $A^{**} = A$.*
2. *Если $A$ допускает замыкание, то $A^* = (\overline{A})^*$.*

**Доказательство.** $\boxed{2}$. Так как $A \subset \overline{A}$, то $\overline{A} \in drd\mathfrak{L}(H)$. Поэтому

$$Gr\big((\overline{A})^*\big) \overset{(8.3)}{=} J\big(Gr(\overline{A})\big)^{\perp} = J\big(\overline{Gr(A)}\big)^{\perp} \overset{\text{п. 2 утв. 8.7}}{=}$$

$$= \overline{J\big(Gr(A)\big)}^{\perp} \overset{(8.3)}{=} Gr(A^*). \quad \blacksquare$$

# 9. Симметрические и самосопряженные неограниченные линейные операторы

В этой главе рассматриваются два важных класса линейных операторов общего вида в гильбертовом пространстве, тесно связанных друг с другом: класс симметрических операторов и класс самосопряженных операторов.

**Определения.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$.

1. Оператор $A$ называется *симметрическим*, если

$$\forall\, x, y \in D(A)\ \ (Ax, y) = (x, Ay).$$

Множество симметрических операторов, действующих в $H$, обозначим $sym\mathfrak{L}(H)$.

2. Оператор $A$ называется *неотрицательным*, если

$$A \in sym\mathfrak{L}(H) \ \text{ и } \ \forall\, x \in D(A)\ \ (Ax, x) \geqslant 0.$$

3. Оператор $A$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$.

Множество самосопряженных операторов, действующих в $H$, обозначим $sa\mathfrak{L}(H)$. Отметим, что $sa\mathcal{L}(H) \subset sa\mathfrak{L}(H)$.

4. Симметрический оператор $A \in sym\mathfrak{L}(H)$ называется *максимальным*, если из того, что $B \in sym\mathfrak{L}(H)$ и $A \subset B$, следует $A = B$.

**Утверждение 9.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in \mathfrak{L}(H)$. Тогда:*

1. *Если $A \in sym\mathfrak{L}(H)$ и $Ker\, A = \{0\}$, то $A^{-1} \in sym\mathfrak{L}(H)$.*
2. *Если $A \in sym\mathfrak{L}(H) \setminus \mathcal{L}(H)$, то $D(A) \neq H$.*
3. *Обобщенное неравенство Коши:*

$$\big(A \geqslant 0\big) \Longrightarrow \Big(\forall\, x, y \in D(A)\ \ |(Ax, y)|^2 \leqslant (Ax, x)(Ay, y)\Big).$$

4. *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Тогда*

$$A \in sym\mathfrak{L}(H) \Longleftrightarrow \forall\, x \in D(A)\ \ (Ax, x) \in \mathbb{R}.$$

5. *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in sym\mathfrak{L}(H)$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $e_1 \perp e_2$.*

**Доказательство.** $\boxed{1}$. Пусть $x, y \in D\big(A^{-1}\big) = Im\, A$. Тогда

$$(A^{-1}x, y) = [u := A^{-1}x \in D(A), y := Av, v \in D(A)] =$$

$$= (u, Av) = (Au, v) = (x, A^{-1}y).$$

$\boxed{2}$. Справедливость этого утверждения следует из теоремы 2.1.

$\boxed{3, 4}$. Эти утверждения доказываются так же, как их аналоги для ограниченных операторов в утверждениях 2.7 и 3.1. ■

**Утверждение 9.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in drd\mathfrak{L}(H)$. Тогда:*

1. $A \in sym\mathfrak{L}(H) \Longleftrightarrow A \subset A^*$.

2. *Если $A \in sym\mathfrak{L}(H)$, то $A$ допускает замыкание, $\overline{A} \in sym\mathfrak{L}(H)$ и $A \subset A^{**} = \overline{A} \subset A^*$.*

3. *Если $A \in sa\mathfrak{L}(H)$, то $A$ — максимальный симметрический замкнутый плотно определенный оператор.*

4. $A^*A \geqslant 0$.

**Доказательство.** $\boxed{3}$. Максимальность оператора $A$ следует из цепочки соотношений

$$A \subset B \Longrightarrow B^* \subset A^* = A \subset B \subset B^*.$$

$\boxed{4}$. Пусть $x, y \in D(A^*A)$. Тогда в силу определения $D(A^*A)$ получим, что $x, y \in D(A)$ и $Ax, Ay \in D(A^*)$. Поэтому $\big(A^*(Ax), y\big) = (Ax, Ay) = \big(x, A^*(Ay)\big)$.

При этом $(A^*(Ax), x) = (Ax, Ax) = \|Ax\| \geqslant 0$. ■

**Утверждение 9.3.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $B \in sa\mathfrak{L}(H)$ и $A \in \mathfrak{L}(H)$. Тогда:*

1. *Если $A \in sym\mathfrak{L}(H)$, то и $(A+B) \in sym\mathfrak{L}(H)$.*
2. *Если $A \in sa\mathfrak{L}(H)$, то и $(A+B) \in sa\mathfrak{L}(H)$.*

**Теорема 9.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H)$. Тогда:*

1. *Если $A \in sa\mathfrak{L}(H)$ и $Ker\, A = \{0\}$, то*

$$\overline{Im\, A} = H \text{ и } A^{-1} \in sa\mathfrak{L}(H).$$

2. *Если $\overline{Im\, A} = H$, то $Ker\, A = \{0\}$.*
3. *Если $Im\, A = H$, то*

$$A \in sa\mathfrak{L}(H),\ Ker\, A = \{0\} \text{ и } A^{-1} \in sa\mathfrak{L}(H).$$

**Доказательство.** $\boxed{1}$. Поскольку

$$Ker\, A = Ker\, A^* \overset{(8.5)}{=} (Im\, A)^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow H = \overline{Im\, A} = \overline{D\big(A^{-1}\big)},$$

то в силу утверждения 8.8 имеем $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$.

$\boxed{2}$. Поскольку $A \subset A^*$, то

$$Ker\, A \subset Ker\, A^* \overset{(8.5)}{=} (Im\, A)^{\perp} = \Big(\overline{Im\, A}\Big)^{\perp} = \{0\}.$$

$\boxed{3}$. Из п. 2 доказываемой теоремы следует, что существует оператор $A^{-1}$, а в силу условия доказываемой теоремы следует, что $D(A^{-1}) = H$. Из п. 1 утверждения 9.1 следует, что $A^{-1} \in sym\mathfrak{L}(H)$. Таким образом, оператор $A^{-1}$ — симметрический и определен на всем $H$. Поэтому по теореме 2.1 оператор $A^{-1}$ — самосопряженный, а в силу п. 1 доказываемой теоремы получим, что и оператор $A$ тоже является самосопряженным. ■

**Теорема 9.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in sym\mathfrak{L}(H)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:*

1. *Для любого* $x \in D(A)$

$$\left\|(A-\lambda I)x\right\|^2 = \left\|\big(A-\mathfrak{Re}(\lambda)I\big)x\right\|^2 + |\mathfrak{Im}(\lambda)|^2\|x\|^2. \qquad (9.1)$$

2. *Если* $\lambda \notin \mathbb{R}$, *то оператор* $(A-\lambda I)$ *инъективен.*
3. *Если* $\lambda \notin \mathbb{R}$, *то*

$$A \in cl\mathfrak{L}(H) \Longleftrightarrow \big(Im\,(A-\lambda I) \text{ — замкнутое множество}\big).$$

4. *Если* $\lambda \notin \mathbb{R}$ *и* $Im\,(A-\lambda I) = H$, *то* $A$ *— максимальный симметрический оператор.*

**Доказательство.** $\boxed{2{,}3}$. В силу (9.1) оператор $A-\lambda I$ строго отделен от нуля и поэтому инъективен. Теперь осталось применить утверждение 8.4.

$\boxed{4}$. Пусть $B \in sym\mathfrak{L}(H)$ и $A \subset B$. Тогда $Im\,(B-\lambda I) = H$. Пусть $x \in D(B)$. Тогда найдется $y \in D(A) \subset D(B)$ такой, что

$$(B-\lambda I)x = (A-\lambda I)y = (B-\lambda I)y \Longrightarrow (B-\lambda I)(x-y) = 0 \overset{2}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow x = y \Longrightarrow x \in D(A) \Longrightarrow D(B) \subset D(A). \ \blacksquare$$

**Теорема 9.3.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство над полем* $\mathbb{C}$ *и* $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H)$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $A \in sa\mathfrak{L}(H)$.
2. $A \in cl\mathfrak{L}(H)$ *и* $Ker\,(A^* \pm iI) = \{0\}$.
3. $Im\,(A \pm iI) = H$.

**Доказательство.** $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. Справедливость этого утверждения вытекает из п. 3 утверждения 9.2 и п. 2 теоремы 9.2.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$. В силу (8.5) имеем

$$\{0\} = Ker\,(A^* \mp iI) = Im\,(A \pm iI)^{\perp} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H = \overline{Im\,(A \pm iI)} \overset{\text{п. 3 теор. 9.2}}{=} Im\,(A \pm iI).$$

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$. Пусть $y \in D(A^*)$. Тогда поскольку

$$Im\,(A - iI) = H,$$

то найдется $x \in D(A)$ такой, что

$$(A^* - iI)y = (A - iI)x \overset{D(A)\subset D(A^*)}{\Longrightarrow} (A^* - iI)(y - x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (y - x) \in Ker\,(A^* - iI) = Im\,(A + iI)^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = y \Longrightarrow y \in D(A) \Longrightarrow D(A^*) \subset D(A) \Longrightarrow A = A^*.$$

**Теорема 9.4.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in drd\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H)$ и $Q := I + A^*A$. Тогда*:

1. $A^*A \in sa\mathfrak{L}(H)$.

2. $Im\,Q = H$, $Ker\,Q = \{0\}$.

3. *Существует единственная пара линейных операторов $B, C \in \mathcal{L}(H)$ такая, что $C = AB$ и $B = Q^{-1}$.*

*При этом $\|C\| \leqslant 1$ и $I \geqslant B \geqslant 0$.*

**Доказательство.** 1. Пусть $x \in D(Q)$. Тогда $Ax \in D(A^*)$, и поэтому

$$(Qx, x) = \|x\|^2 + \|Ax\|^2 \geqslant \|x\|^2 \Longrightarrow Ker\,Q = \{0\}.$$

Отметим также, что в силу п. 4 утверждения 9.2 $Q$ — симметрический оператор.

2. $I = QB_1 = QB_2 \overset{1}{\Longrightarrow} B_1 = B_2$. Поэтому и оператор $C$, если он есть, определяется однозначно.

3. Поскольку $H^2 \overset{(8.6)}{=} Gr(A) \oplus J\big(Gr(A^*)\big)$, то для любого $x \in H$ существуют однозначно определенные элементы $Bx$ и $Cx$ такие, что

$$(x; 0) = (Bx; ABx) + \big(A^*(Cx); (-Cx)\big). \tag{9.2}$$

Отметим также, что в силу равенства (8.4) справедливо соотношение

$$(Bx; ABx) \perp \big(A^*(Cx); (-Cx)\big).$$

Операторы $B$ и $C$ линейны, и $D(B) = D(C) = H$. По теореме Пифагора из равенства (9.2) получим

$$\|x\|^2 = \|ABx\|^2 + \|Bx\|^2 + \|Cx\|^2 + \|A^*Cx\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \|Bx\|^2 + \|Cx\|^2 \Longrightarrow \|B\| \leqslant 1 \text{ и } \|C\| \leqslant 1.$$

4. Поскольку $0 \overset{(9.2)}{=} ABx - Cx$, то $C = AB$, а

$$x = Bx + A^*Cx = Bx + A^*ABx = QBx \Longrightarrow I = QB.$$

5. Поскольку $I = QB$, то $Ker\,B = \{0\}$ и $Im\,Q = H \overset{1}{\Longrightarrow}$

$$\Longrightarrow B = Q^{-1} : H \to Im\,B = D(Q).$$

Таким образом, оператор $B$ симметричен и определен на всем $H$. Поэтому $B \in sa\mathfrak{L}(H)$. Так как $Ker\,B = \{0\}$, то в силу п. 1 теоремы 9.1 $Q \in sa\mathfrak{L}(H) \Longrightarrow A^*A \in sa\mathfrak{L}(H)$.

6. $\forall\, x \in H\ \exists\, y \in D(Q)\ \ Qy = x \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (Bx, x) = (BQy, Qy) = (y, Qy) \overset{1}{\geqslant} 0 \Longrightarrow B \geqslant 0.$$

Поскольку $\|B\| \overset{3}{\leqslant} 1$, то в силу п. 9 утверждения 3.2 справедливо неравенство $I \geqslant B$. ∎

# 10. Соболевские пространства и теоремы вложения

В этой главе рассматриваются важные для приложений функциональные пространства Соболева и одно из представлений пространства Соболева $W_2^1(a;b)$.

**Определение.** $\widetilde{W}_p^k[a;b] := \langle C^k[a;b], ||\cdot||_{k,p}\rangle$, где

$$||x(\cdot)||_{k,p}^p := \sum_{n=0}^{k} ||x^{(n)}(\cdot)||_{L_p(a;b)}^p.$$

Это пространство не является полным. Его пополнение обозначается $W_p^k(a;b)$.

**Утверждение 10.1.** *При $p = 2$ в $\widetilde{W}_2^k(a;b)$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с этой нормой:*

$$(x(\cdot), y(\cdot))_k := \sum_{n=0}^{k} \int_a^b x^{(n)}(t)\overline{y^{(n)}(t)}\,dt.$$

*Тем самым $\widetilde{W}_2^k[a;b]$ — евклидово пространство, а $W_2^k(a;b)$ — гильбертово пространство.*

**Определение.** Пространство $W_2^k(a;b)$ еще обозначается через $H^k(a;b)$.

Здесь мы более подробно рассмотрим пространство $H^1(a;b)$. Опишем $H^1(a;b)$ в терминах элементов пространства $L_2(a;b)$.

Примем обозначения: $(\cdot,\cdot)_1$ — скалярное произведение в $H^1(a;b)$; $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в $H^0(a;b) := L_2(a;b)$.

Пусть $x \in H^1(a;b)$. Тогда в силу определения $H^1(a;b)$ (см., например, конструкцию пополнения в учебном пособии [8, теорема 1.5.3]) $x$ есть класс эквивалентных фундаментальных в $\widetilde{W}_2^1[a;b]$ последовательностей. Пусть $\{\, x_n(\cdot)\,\}$ — представитель этого класса.

В силу неравенства

$$||x_n(\cdot) - x_m(\cdot)||_{1,2}^2 = ||x_n(\cdot) - x_m(\cdot)||_{0,2}^2 + ||x_n'(\cdot) - x_m'(\cdot)||_{0,2}^2 \geqslant$$

$$\geqslant \max\{\, ||x_n(\cdot) - x_m(\cdot)||_{0,2}^2, ||x_n'(\cdot) - x_m'(\cdot)||_{0,2}^2 \,\}$$

получим, что последовательности $\{\, x_n(\cdot)\,\}$, $\{\, x_n'(\cdot)\,\}$ фундаментальны в $L_2(a;b)$, поэтому существуют такие $\overline{x}(\cdot)$, $\widehat{x}(\cdot)$ из $L_2(a;b)$, что $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$ и $x_n'(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widehat{x}(\cdot)$. При этом элементы $\overline{x}(\cdot)$ и $\widehat{x}(\cdot)$ определяются однозначно по $\{\, x_n(\cdot)\,\}$ (все эквивалентные в $\widetilde{W}_2^1[a;b]$ фундаментальные последовательности будут иметь одни и те же пределы $\overline{x}(\cdot)$ и $\widehat{x}(\cdot)$ в $L_2(a;b)$). Таким образом, каждый элемент из пространства $H^1(a;b)$ однозначно представим парой элементов из пространства $L_2(a;b)$.

**Замечание.** Если $x(\cdot) \in C^1[a;b]$, то постоянная последовательность

$$\{\, x(\cdot)\,\}_c := \{\, x_n(\cdot)\,\} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ x_n(\cdot) = x(\cdot)$$

фундаментальна в $\widetilde{W}_2^1[a;b]$, поэтому элемент пространства $H^1(a;b)$, ею определяемый, имеет вид $(x(\cdot); x'(\cdot))$.

**Определение.** Если $x = (\overline{x}(\cdot); \widehat{x}(\cdot)) \in H^1(a;b)$, то $\widehat{x}(\cdot)$ называется *обобщенной производной элемента* $\overline{x}(\cdot)$ и обозначается "по-старому", т. е. $\widehat{x}(\cdot) := \overline{x}'(\cdot)$.

Покажем, что обобщенная производная $\overline{x}'(\cdot)$ определяется по $\overline{x}(\cdot)$ однозначно.

**Теорема 10.1.** *Пусть $\overline{x}(\cdot), \widehat{x}(\cdot) \in L_2(a;b)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $(\overline{x}(\cdot); \widehat{x}(\cdot)) \in H^1(a;b)$.

2. *Для любой функции* $\varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b]$ *справедливо равенство*

$$(\widehat{x}(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = -(\overline{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0, \tag{10.1}$$

*где* $\overset{\circ}{C}{}^1[a;b] := \{\, \varphi(\cdot) \in C^1[a;b] : \ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \,\}$.

**Доказательство.** $\boxed{\Longrightarrow}$. Пусть $\{\, x_n(\cdot) \,\} \subset C^1[a;b]$ : $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$ и $x_n'(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widehat{x}(\cdot)$. Но в силу формулы *интегрирования по частям*

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b] \ \ (x_n'(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = \int\limits_a^b x_n'(t)\varphi(t)\, dt =$$

$$= -\int\limits_a^b x_n(t)\varphi'(t)\, dt = -(x_n(\cdot), \varphi'(\cdot))_0.$$

Теперь осталось в получившемся равенстве перейти к пределу при $n \to \infty$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. 1. В силу плотности множества $C[a;b]$ в пространстве $L_2(a;b)$ найдется последовательность $\{\, \widehat{x}_n(\cdot) \,\} \subset C[a;b]$ : $\widehat{x}_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widehat{x}(\cdot)$.

Пусть $\widetilde{x}_n := \int\limits_a^t \widehat{x}_n(\tau)\, d\tau$. В силу определения $\widetilde{x}_n$ и непрерывности интегрального оператора $\widetilde{x}_n'(\cdot) = \widehat{x}_n(\cdot)$ получим $\widetilde{x}_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widetilde{x}(\cdot) := \int\limits_a^t \widehat{x}(\tau)\, d\tau$. Поскольку в силу формулы *интегрирования по частям* и соотношения (10.1)

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b] \ \ (\widetilde{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0 = \lim_{n\to\infty} (\widetilde{x}_n(\cdot), \varphi'(\cdot))_0 =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} (\widehat{x}_n(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = -(\widehat{x}(\cdot), \varphi(\cdot))_0 \overset{(10.1)}{=} (\overline{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0,$$

то

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b] \ \ (\widetilde{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0 = (\overline{x}(\cdot), \varphi'(\cdot))_0. \tag{10.2}$$

2. Возьмем произвольное $\psi(\cdot) \in C[a;b]$. Тогда

$$\varphi(t) := \int\limits_a^t \psi(\tau)\, d\tau - \tfrac{t-a}{b-a} \int\limits_a^b \psi(\tau)\, d\tau \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b] \text{ и}$$

$$\varphi'(\cdot) = \psi(\cdot) - \tfrac{1}{b-a}\, (\psi(\cdot), 1)_0.$$

Тогда в силу соотношения (10.2) для любой функции $\psi(\cdot)$ из множества $C[a;b]$ справедливо равенство

$$(\widetilde{x}(\cdot), \psi(\cdot))_0 = (\overline{x}(\cdot) + \alpha, \psi(\cdot))_0,$$

где

$$\alpha = \frac{(\widetilde{x}(\cdot), 1)_0 - (\overline{x}(\cdot), 1)_0}{b-a}.$$

Поскольку $C[a;b]$ всюду плотно в $L_2(a;b)$, то $\widetilde{x}(\cdot) = \overline{x}(\cdot) + \alpha$.

Рассмотрим $\{ x_n(\cdot) \} \subset C^1[a;b] \ : \ x_n(\cdot) := \widetilde{x}_n(\cdot) - \alpha$. Тогда $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$ и $x'_n(\cdot) = \widehat{x}_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \widehat{x}(\cdot)$. Тем самым $(\overline{x}(\cdot); \widehat{x}(\cdot)) \in H^1(a;b)$ и $\overline{x}'(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$. ■

**Замечания.** 1. В силу плотности множества $\overset{\circ}{C}{}^1[a;b]$ в $L_2(a;b)$ соотношение (10.1) определяет $\widehat{x}(\cdot)$ по $\overline{x}(\cdot)$ однозначно. Таким образом, можно считать, что элементами $H^1(a;b)$ являются такие элементы $x \in L_2(a;b)$, для которых существует обобщенная производная $x' \in L_2(a;b)$, определяемая соотношением

$$\forall\, \varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a;b] \ \ (x'(\cdot), \varphi(\cdot))_0 = -(x(\cdot), \varphi'(\cdot))_0.$$

При этом $||x(\cdot)||^2_{H^1(a;b)} = ||x(\cdot)||^2_{L_2(a;b)} + ||x'(\cdot)||^2_{L_2(a;b)}$.

В дальнейшем будем использовать именно эту интерпретацию пространства $H^1(a;b)$.

2. Обобщенная производная — "глобальный" объект, так как она определяется по "всей" функции, а не через значения функции в произвольной окрестности точек, как это имеет место для обычных производных.

**Пример 10.1.** $|t| \in H^1(-1;1)$ и $|t|' = \operatorname{sign}(t)$, поскольку для любой функции $\varphi(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^1[-1;1]$

$$(|\cdot|',\varphi(\cdot))_0 \overset{(10.1)}{=} -(|\cdot|,\varphi'(\cdot))_0 = -\int\limits_{-1}^{1} |t|,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{0}(-t)\varphi'(t)\,dt - \int\limits_{0}^{1} t\varphi'(t)\,dt =$$

$$= t\varphi(t)\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0}\varphi(t)\,dt - t\varphi(t)\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sign}(t)\varphi(t)\,dt = (\operatorname{sign}(\cdot),\varphi(\cdot))_0.$$

**Пример 10.2.** У $\operatorname{sign}(\cdot)$ нет обобщенной производной из $L_2(-1;1)$, и тем самым $\operatorname{sign}(\cdot) \notin H^1(-1;1)$. Если бы такая производная $\widehat{x}(\cdot) = \operatorname{sign}'(\cdot) \in L_2(-1;1)$ имелась, то

$$\forall\,\varphi(\cdot)\in \overset{\circ}{C}{}^1[-1;1] \;\; (\widehat{x}(\cdot),\varphi(\cdot))_0 =$$

$$= -(\operatorname{sign}(\cdot),\varphi'(\cdot))_0 = -\int\limits_{-1}^{0}(-1)\varphi'(t)\,dt - \int\limits_{0}^{1}(+1)\varphi'(t)\,dt = 2\varphi(0).$$

Тем самым

$$\forall\,\varphi(\cdot)\in \overset{\circ}{C}{}^1[-1;1] \;\; (\widehat{x}(\cdot),\varphi(\cdot))_0 = 2\varphi(0). \qquad (10.3)$$

Пусть $\Phi := \{\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^1[-1;1] : \;\forall\, t \geqslant \; \varphi(t) = 0\}$. Сужения функций из этого множества на $(-1;0)$ образуют плотное в $L_2(-1;0)$ множество. Поскольку

$$\forall\,\varphi(\cdot)\in\Phi \;\; 0 = 2\varphi(0) \overset{(10.3)}{=} (\widehat{x}(\cdot),\varphi(\cdot))_0 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\widehat{x}(t)\varphi(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{0}\widehat{x}(t)\varphi(t)\,dt = (\widehat{x}(\cdot),\varphi(\cdot))_{L_2(-1;0)},$$

то $\widehat{x}(\cdot)\Big|_{(-1;0)} \overset{\text{п.в.}}{=} 0$.

Аналогично показывается, что $\widehat{x}(\cdot)\Big|_{(0;1)} \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Тем самым $\widehat{x}(\cdot) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, что противоречит формуле (10.3).

**Замечания.** 1. В соотношении (10.1) можно вместо $\overset{\circ}{C}{}^1[a;b]$ взять множество $\mathcal{D}(a;b)$ бесконечно дифференцируемых финитных на $(a;b)$ функций, *носитель* которых, т. е. множество $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{\, t \in (a;b) : \varphi(t) \neq 0 \,\}}$, лежит в $(a;b)$, поскольку множество таких функций тоже плотно в $L_2(a;b)$.

2. Аналогично пространствам $\widetilde{W}_p^k[a;b]$, $W_p^k[a;b]$ и $H^k(a;b)$ определяются и пространства $\widetilde{W}_p^k(\Omega)$, $W_p^k(\Omega)$ и $H^k(\Omega)$, где $\Omega$ — некоторая область.

**Теорема 10.2.** *Если $a,b \in \mathbb{R}$, то $H^1(a;b)$ компактно вложено в $C[a;b]$, т. е. $\forall\, x \in H^1(a;b)\, \exists\, Jx \in C[a;b] \,:\, (Jx)(\cdot) \in x$ и $J$ — линейный компактный оператор из $H^1(a;b)$ в $C[a;b]$).*

**Доказательство.** 1. По теореме о среднем значении в интегральном исчислении для любой функции $x(\cdot)$ из $C^1[a;b]$ существует точка $\xi \in [a;b]$ такая, что

$$(b-a)x(\xi) = \int\limits_a^b x(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом,

$$\forall\, t \in [a;b] \;\; x(t) = \int\limits_\xi^t x'(\tau)\, d\tau + \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b x(\tau)\, d\tau.$$

Поэтому

$$\forall\, t \in [a;b] \;\; |x(t)| \leqslant \int\limits_a^b |x'(\tau)|\, d\tau + \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b |x(\tau)|\, d\tau \overset{(1.1)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \sqrt{b-a}\, ||x'(\cdot)||_{L_2(a;b)} + (\sqrt{b-a})^{-1} ||x(\cdot)||_{L_2(a;b)} \leqslant$$
$$\leqslant\; K ||x(\cdot)||_{H^1(a;b)}, \text{ т. е.}$$

$$\forall\, x(\cdot) \in C^1[a;b]\; ||x(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant K ||x(\cdot)||_{H^1(a;b)}. \tag{10.4}$$

Здесь $K = 2\max\{\sqrt{b-a}), (\sqrt{b-a})^{-1}\}$ зависит только от $a$ и $b$.

2. Пусть $x \in H^1(a;b)$. Тогда найдется последовательность $\{x_n(\cdot)\} \subset C^1[a;b]$ такая, что $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} x(\cdot)$ и $x_n'(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} x'(\cdot)$. В силу неравенства (10.4) последовательность $\{x_n(\cdot)\}$ фундаментальна в $C[a;b]$. Поэтому $\exists\, \overline{x}(\cdot) \in C[a;b] : x_n(\cdot) \underset{C[a;b]}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$. Тогда $x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} \overline{x}(\cdot)$, тем самым $\overline{x}(\cdot) \overset{\text{п.в.}}{=} x(\cdot)$.

Переходя к пределу в неравенстве

$$||x_n(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant K||x_n(\cdot)||_{H^1(a;b)},$$

получим, что

$$||\overline{x}(\cdot)||_{C[a;b]} \leqslant K||x||_{H^1(a;b)}. \tag{10.5}$$

Тем самым $Jx = \overline{x}(\cdot)$ и $||J|| \leqslant K$.

3. Покажем, что $J(B[0;1]_{H^1(a;b)})$ предкомпактно в $C[a;b]$.

Поскольку $J$ непрерывен, то $J(B[0;1]_{H^1(a;b)})$ ограничено.

Осталось показать равностепенную непрерывность семейства. Пусть $x \in B[0;1]_{H^1(a;b)}$ и $\{x_n(\cdot)\} \subset C^1[a;b]$ такие, что $x_n(\cdot) \underset{C[a;b]}{\longrightarrow} (Jx)(\cdot)$ и $x_n'(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} x'(\cdot)$. Тогда $||x_n'(\cdot)||_{L_2(a;b)} \to ||x'(\cdot)||_{L_2(a;b)}$.

При $t_1 < t_2$ получим

$$|x_n(t_2) - x_n(t_1)| = \Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} x_n'(\tau)\, d\tau\Big| \overset{(1.1)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} |x_n'(\tau)|^2\, d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} 1\, d\tau\Big)^{1/2} \leqslant ||x_n'(\cdot)||_{L_2(a;b)}\sqrt{t_2 - t_1}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$|(Jx)(t_2) - (Jx)(t_1)| \leqslant ||x'(\cdot)||_{L_2(a;b)}\sqrt{t_2 - t_1} \leqslant$$
$$\leqslant ||x(\cdot)||_{H^1(a;b)}\sqrt{t_2 - t_1} \leqslant \sqrt{t_2 - t_1},$$

т. е. $\omega(\delta; Jx, [a;b]) \leqslant \sqrt{\delta}$. ∎

**Замечание.** Поскольку мы вольны для представления элемента $x \in H^1(a;b)$ взять любую функцию $x(\cdot) \in x$, то всегда можно считать, что $x(\cdot)$ — абсолютно непрерывный представитель.

**Утверждение 10.2.** *Пусть $x, y \in H^1(a;b)$. Тогда справедливы следующие формулы:*

$$\forall\, t \in [a;b] \quad x(t) = x(a) + \int\limits_a^t x'(\tau)\, d\tau, \tag{10.6}$$

$$\int\limits_a^t x'(\tau)y(\tau)\, d\tau = x(\tau)y(\tau)\Big|_a^b - \int\limits_a^t x(\tau)y'(\tau)\, d\tau. \tag{10.7}$$

**Доказательство.** Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} \subset C^1[a;b]$ — последовательности, порождающие $x$ и $y$:

$$x_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} x(\cdot), \quad x_n'(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} x'(\cdot),$$

$$y_n(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} y(\cdot), \quad y_n'(\cdot) \underset{L_2(a;b)}{\longrightarrow} y'(\cdot).$$

1. Поскольку $x_n(\cdot) \underset{C[a;b]}{\longrightarrow} x(\cdot)$, то, переходя при каждом $t \in [a;b]$ к пределу при $n \to +\infty$ в равенстве

$$x_n(t) = x_n(a) + \int\limits_a^t x_n'(\tau)\, d\tau,$$

получим формулу (10.6).

2. Аналогично, переходя к пределу при $n \to +\infty$ в равенстве $\int\limits_a^t x_n'(\tau)y_n(\tau)\, d\tau = x_n(\tau)y_n(\tau)\Big|_a^b - \int\limits_a^t x_n(\tau)y_n'(\tau)\, d\tau$, получим формулу (10.7). ∎

**Замечания.** 1. В силу формулы (10.6) можно считать, что

$$H^1(a;b) = \left\{ A + \int\limits_a^t y(\tau)\, d\tau \,:\, y(\cdot) \in L_2(a;b),\ A \in \mathbb{P} \right\}. \tag{10.8}$$

Тем самым пространство $H^1(a;b)$ состоит из абсолютно непрерывных на $[a;b]$ функций.

2. В общем случае если область $\Omega \in \mathbb{R}^n$ выпукла и $0 \leqslant k < m - \dfrac{n}{p}$, то пространство $W_p^m(\Omega)$ непрерывно вложено в $C^k(\overline{\Omega})$.

3. С другими теоремами вложения можно познакомиться в монографиях [9, 10]. ■

**Утверждение 10.3.** *Пусть $x, y \in H^1(0;+\infty)$. Тогда справедливы следующие формулы:*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \tag{10.9}$$

$$(x', y)_{L_2(0;+\infty)} = x(0)\cdot y(0) - (x, y')_{L_2(0;+\infty)}. \tag{10.10}$$

**Доказательство.** 1. Так как

$$\|x\|^2_{H^1(0;+\infty)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2_{H^1(n-1;n)},$$

то $\|x\|^2_{H^1(n-1;n)} \to 0 \overset{(10.5)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0.$

2. Формула (10.10) есть следствие формул (10.7) и (10.9). ■

Рассмотрим одну полезную конструкцию приближения функций из $L_2(a;b)$ бесконечно дифференцируемыми функциями.

Пусть $\omega(t)$ — какая-нибудь неотрицательная и бесконечно дифференцируемая на всей оси четная функция такая, что $\omega(t) \equiv 0$ при $|t| > 1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t)dt = 1$.

Например, в качестве $\omega(t)$ можно взять функцию, которая равна $\gamma^2 \exp\left(\dfrac{1}{|t|^2 - 1}\right)$ при $|t| < 1$, равна нулю при $|t| \geqslant 1$, и постоянная $\gamma$ выбрана таким образом, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t)dt = 1$.

**Определения.** 1. При всех достаточно малых $h > 0$ *ядром осреднения* будем называть функцию $\omega_h(t) := h^{-1}\omega(t/h)$, так что

$$\omega_h(t) \equiv 0 \text{ при } |t| > h, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t)dt = 1.$$

2. Пусть $f(t)$ — какая-нибудь функция из $L_2[a,b]$, продолженная нулем вне отрезка $[a,b]$. Под *средней функцией для* $f(t)$ будем понимать функцию

$$f_h(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-s)f(s)ds.$$

**Замечание.** При всех достаточно малых $h > 0$ функция $f_h(t)$ является бесконечно дифференцируемой финитной на отрезке $[a-h, b+h]$ функцией.

**Теорема 10.3.** *Пусть $f(t)$ — функция из $L_2[a,b]$, продолженная нулем вне отрезка $[a,b]$. Тогда для любого достаточно малого $\delta > 0$*

$$f_h(t) \to f(t) \text{ *в* } L_2[a+\delta, b-\delta] \text{ *при* } h \to 0.$$

**Доказательство.** 1. Так как

$$f_h(t) - f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-s)(f(s)-f(t))ds =$$

$$= \int\limits_{|s-t|<h} \omega_h(t-s)(f(s)-f(t))ds, \text{ то}$$

$$|f_h(t) - f(t)| \leqslant \int\limits_{|s-t|<h} \omega_h(t-s)|(f(s)-f(t))|ds \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_{|s-t|<h} \omega_h^2(t-s)ds\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{|s-t|<h} |(f(s)-f(t))|^2 ds\Big)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\int_a^b |f_h(t) - f(t)|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \int_{|s-t|<h} \omega_h^2(t-s)ds \int_{|s-t|<h} |(f(s)-f(t))|^2 dsdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{h}\int_a^b \Bigl(\int_{|s-t|<h} |(f(s)-f(t))|^2 ds\Bigr)dt =$$

$$= \frac{M}{h}\int_{|s-t|<h} \Bigl(\int_a^b |(f(s)-f(t))|^2 dt\Bigr)ds.$$

2. Из свойств интеграла Лебега следует, что при $|\xi| < h$ справедливо соотношение

$$\int_a^b |(f(t+\xi) - f(t))|^2 dt < \varepsilon(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Поэтому

$$\int_a^b |f_h(t) - f(t)|^2 dt \leqslant M\varepsilon(h) \to 0 \text{ при } h \to 0. \ \blacksquare$$

Теорема 10.3 позволяет дать еще одну характеризацию обобщенной производной.

**Теорема 10.4.** *Функция $y(t) \in L_2[a,b]$ есть обобщенная производная функции $x(t) \in L_2[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует последовательность функций $\{\, x_n(t) \,\} \subset C^\infty[a+\delta, b-\delta]$ таких, что*

$$x_n(t) \to x(t), x_n'(t) \to y(t) \text{ в } L_2[a+\delta, b-\delta] \text{ при } n \to \infty.$$

**Доказательство.** $\boxed{\Longrightarrow}$. Зафиксируем достаточно малое $\delta > 0$ и рассмотрим среднее от функции $x(t)$, продолженной нулем вне отрезка $[a,b]$:

$$x_h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-s)x(s)ds.$$

Так как $t$ по предположению изменяется лишь на отрезке $[a+\delta, b-\delta]$, то при достаточно малых $h$ функция $\omega_h(t-s)$ является бесконечно дифференцируемой финитной на отрезке $[a,b]$ и, в частности, функция $\omega_h((\cdot)-s)$ является бесконечно дифференцируемой финитной на отрезке $[a,b]$. Следовательно,

$$x_h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-s)x(s)ds = \int\limits_a^b \omega_h(t-s)x(s)ds, \text{ а}$$

$$x'_h(t) = \int\limits_a^b (\omega_h(t-s))'_t x(s)ds = -\int\limits_a^b (\omega_h(t-s))'_s x(s)ds.$$

Но в силу (10.1) имеем

$$-\int\limits_a^b (\omega_h(t-s))'_s x(s)ds = \int\limits_a^b \omega_h(t-s)y(s)ds.$$

Таким образом,

$$x'_h(t) = \int\limits_a^b \omega_h(t-s)y(s)ds \ =: \ y_h(t).$$

Согласно теореме 10.3 получим

$x_h(t) \to x(t)$, $y_h(t) \to y(t)$ в $L_2[a+\delta, b-\delta]$ при $h \to 0$. ■

# 11. Примеры неограниченных симметрических и самосопряженных линейных операторов

В данной главе рассматривается пространство $H = L^2(0;1)$ над полем $\mathbb{C}$.

Рассмотрим линейные операторы $A_0$, $A_\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$) и $A_2$, действующие в $H$ и определенные следующим образом:

$$\begin{gathered} D(A_0) := \{\, x \in H^1(0;1) : \, x(0) = x(1) = 0 \,\}, \\ D(A_\alpha) := \{\, x \in H^1(0;1) : \, x(0) = \alpha x(1) \,\}, \\ D(A_2) := H^1(0;1) \ \text{ и } \ Ax(\cdot) := ix'(\cdot). \end{gathered} \tag{11.1}$$

Здесь $A \in \{A_0, \, A_\alpha \, A_2\}$, а $x'(\cdot)$ — обобщенная производная $x(\cdot)$.

**Замечание.** Отметим, что в силу определения (11.1)

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{C} : \, |\alpha| = 1 \ \ A_0 \subset A_\alpha \subset A_2 \tag{11.2}$$

и $H = L^2(0;1) = \overline{D(A_0)} = \overline{D(A_\alpha)} = \overline{D(A_2)}$.

**Утверждение 11.1.** *Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ таково, что $|\alpha| = 1$. Тогда*:

1. $A_0 \in cl\mathfrak{L}(H)$.
2. $A_0, A_\alpha \in sym\mathfrak{L}(H)$.
3. $A_\alpha \in sa\mathfrak{L}(H)$.
4. $A_0^* = A_2$.

**Доказательство.** $\boxed{1}$. Найдем $Im\, A_0$. В силу следующей цепочки эквивалентностей:

$$u \in Im\, A_0 \Longleftrightarrow \exists\, x \in L_2(0;1) \ ix' = u, \ x(0) = x(1) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x(t) = -i\int_0^t u(\tau)\,d\tau \text{ и } x(1) = 1\right) \Longleftrightarrow u \in \langle 1\rangle^{\perp}$$

получим, что

$$Im\,A_0 = \langle 1\rangle^{\perp}. \tag{11.3}$$

Поскольку оператор $A_0^{-1}u(t) = -i\int_0^t y(\tau)\,d\tau$ непрерывен на подпространстве $Im\,A_0$, то по п. 4 теоремы 8.1 оператор $A_0$ является замкнутым.

$\boxed{2}$. Пусть $x, y \in D(A_\alpha)$. Тогда

$$(A_\alpha x, y) = \int_0^1 ix'(t)\overline{y(t)}\,dt \overset{(10.7)}{=}$$

$$= ix(1)\overline{y(1)} - ix(0)\overline{y(0)} - \int_0^1 ix(t)\overline{y'(t)}\,dt =$$

$$= ix(1)\overline{y(1)} - i|\alpha|^2 x(1)\overline{y(1)} + (x, A_\alpha y) = (x, A_\alpha y).$$

$\boxed{3}$. В силу теоремы 9.3 достаточно показать, что

$$Im\,(A_\alpha \pm iI) = H.$$

Пусть $y \in L_2(0;1)$. Рассмотрим уравнение $ix' + ix = y$. Его решение находится по формуле

$$x(t) = x(0)e^{-t} - ie^{-t}\int_0^t e^{\tau}y(\tau)\,d\tau \in H^1(0;1).$$

Поэтому справедливо равенство

$$x(1) = x(0)e^{-1} - ie^{-1}\int_0^1 e^{\tau}y(\tau)\,d\tau.$$

Так как $\alpha \neq e$, то $x(0)$ из уравнения $x(0) = \alpha x(1)$ находится однозначно. Тем самым $Im\,(A_\alpha + iI) = H$.

Равенство $Im\,(A_\alpha - iI) = H$ доказывается аналогично.

$\boxed{4}$. 4.1. Пусть $x \in D(A_0)$ и $y \in D(A_2)$. Тогда

$$(A_0x,y)=\int\limits_0^1 ix'(t)\overline{y(t)}\,dt \overset{(10.7)}{=} ix(1)\overline{y(1)}-ix(0)\overline{y(0)}-$$

$$-\int\limits_0^1 ix(t)\overline{y'(t)}\,dt=\int\limits_0^1 x(t)\overline{iy'(t)}\,dt=(x,A_2y),\ \text{т. е.}$$

$$A_2\subset A_0^*. \tag{11.4}$$

4.2. Пусть $y\in D(A_0^*)$, а $z:=A_0^*y$. Тогда для любого $x\in D(A_0)$ справедливы равенства

$$(A_0x,y)=(x,A_0^*y)=(x,z)\ =$$

$$=\int\limits_0^1 x(t)\overline{z(t)}\,dt=\int\limits_0^1 x(t)\,d\overline{\Big(\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau\Big)}=\Big[Z(t):=\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau\Big]\ =$$

$$=\ x(t)\overline{Z(t)}\Big|_0^1-\int\limits_0^1 ix'(t)\overline{\big(iZ(t)\big)}\,dt \overset{(11.1)}{=} -(A_0x,iZ).$$

Поэтому $\forall\, x\in D(A_0)\ \ (A_0x,y+iZ)=0\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (y+iZ)\in(Im\,A_0)^{\perp}\overset{(11.3)}{=}\langle 1\rangle\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y(\cdot)+iZ(\cdot)=C-\text{const}$$

Поэтому функция $y(\cdot)=-iZ(\cdot)+C$ абсолютно непрерывна и $y'=-iZ'=-iz\in L_2(0;1)$. Отсюда следует, что $y\in D(A_2)$, и в силу соотношения (11.4) справедливо равенство $A_2=A_0^*$. ■

# 12. Расширение симметрических операторов

В данной главе рассматривается гильбертово пространство $H$ над полем $\mathbb{C}$.

**Определения.** Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H)$.

1. $N_{\pm i}(A^*) := Ker\,(A^* \mp iI)$ — подпространства собственных векторов оператора $A^*$, отвечающих собственным числам $i$ и $-i$.

2. Величины $n_{\pm}(A) := dim\, N_{\pm i}(A^*) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ называются *индексами дефекта оператора* $A$.

**Замечания.** 1. В силу теоремы 9.3 симметрический плотно определенный оператор $A$ самосопряжен тогда и только тогда, когда $A$ замкнут и $n_+(A) = n_-(A) = 0$.

2. Отметим, что если $n_+ n_- = 0$, но $|n_+(A)| + |n_-(A)| \neq 0$, то в силу п. 4 теоремы 9.2 оператор $A$ — максимальный симметрический, но не самосопряженный.

3. В этой главе будем рассматривать только замкнутые симметрические плотно определенные операторы.

**Теорема 12.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H)$. Тогда справедливы следующие формулы:*

$$Im\,(A \pm iI) = \big(N_{\pm i}(A^*)\big)^{\perp}, \quad H = Im\,(A \pm iI) \oplus N_{\pm i}(A^*), \quad (12.1)$$

$$D(A^*) = D(A) \oplus N_i(A^*) \oplus N_{-i}(A^*). \quad (12.2)$$

**Доказательство.** 1. В силу п. 3 теоремы 9.2 множество $Im\,(A + iI)$ замкнуто. Поэтому

$$Im\,(A+iI) = \big(Ker\,(A^* - iI)\big)^{\perp} = N_i(A^*)^{\perp} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow H = Im\,(A+iI) \oplus N_i(A^*).$$

Аналогично доказывается и второе из равенств (12.1).

2. Покажем, что попарные пересечения множеств $D(A)$, $N_i(A^*)$ и $N_{-i}(A^*)$ равны $\{0\}$.

Это очевидно для множеств $N_i(A^*)$ и $N_{-i}(A^*)$.

Пусть $x \in D(A) \cap N_i(A^*)$. Тогда $Ax \overset{A \subseteq A^*}{=} A^*x = iAx$. Но у симметрического оператора собственные числа вещественны, поэтому $x = 0$.

Оставшееся соотношение доказывается аналогично.

3. Отметим также, что поскольку $D(A) \subset D(A^*)$, то

$$D(A) \oplus N_i(A^*) \oplus N_{-i}(A^*) \subset D(A^*).$$

4. В силу второго равенства из (12.1) для любого $y \in D(A^*)$ найдутся $x \in D(A) \subset D(A^*)$ и $z_+ \in N_i(A^*)$ такие, что

$$(A^* + iI)y = (A+iI)x + z_+.$$

Учитывая равенство $A^*z_+ = iz_+$, получим следующую цепочку импликаций:

$$A^*(y-x) = i(x-y) + \tfrac{1}{2}z_+ + \tfrac{1}{2i}A^*z_+ \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A^*\Big(y - x + \tfrac{i}{2}z_+\Big) = -i\Big(y - x + \tfrac{i}{2}z_+\Big) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z_- := \Big(y - x + \tfrac{i}{2}z_+\Big) \in N_{-i}(A^*) \text{ и } y = x - \tfrac{i}{2}z_+ + z_-. \ \blacksquare$$

**Лемма 12.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H)$, $y \in D(A^*)$, $x \in D(A)$, $z_+ \in N_i(A^*)$, $z_- \in N_{-i}(A^*)$ и $y = x + z_+ + z_-$. Тогда*

$$(A^*y, y) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \|z_+\| = \|z_-\|.$$

**Доказательство.** Непосредственным вычислением получим, что

$$(A^*y, y) = (Ax, x) + i\big(\|z_+\|^2 - \|z_-\|^2\big) +$$
$$+ 2\mathfrak{Im}\big((x, z_+) - (x, z_-) - (z_+, z_-)\big).$$

Осталось учесть, что $(Ax, x) \overset{\text{п. 3 утв. 9.1}}{\in} \mathbb{R}$. ■

**Теорема 12.2** (о симметрических расширениях симметрического оператора). *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H)$.*

*Оператор $B \in \mathfrak{L}(H)$ есть симметрическое расширение оператора $A$ тогда и только тогда, когда существуют такие линейные многообразия $T_{\pm i}(B) \subset N_{\pm i}(A^*)$ и линейный изометрический оператор $U_B : T_i(B) \to T_{-i}(B)$, что*

$$D(B) = D(A) \oplus Im\,(I + U_B)$$

*и для любых $x \in D(A)$ и $z_+ \in T_i(B)$ справедливо равенство*

$$B(x + z_+ + U_B z_+) = Ax + iz_+ - iU_B z_+. \qquad (12.3)$$

*При этом*

$$Im\,(B \pm iI) = Im\,(A \pm iI) \oplus T_{\pm i}(B) \qquad (12.4)$$

*и $B \in cl\mathfrak{L}(H) \Longleftrightarrow (T_{\pm i}$ — замкнутые множества, т. е. подпространства пространства $H)$.*

**Доказательство.** $\boxed{\Longleftarrow}$. В этом случае $D(B) \supset D(A)$, $B|_{D(A)} = A$. Непосредственным вычислением показывается, что для любого $y \in D(B)$ величина $(By, y)$ вещественна. Тем самым из п. 4 утверждения 9.1 следует, что оператор $B$ является симметрическим.

$\boxed{\Longrightarrow}$. 1. Пусть $B$ — симметрическое расширение оператора $A$. Тогда

$$A \subset B \subset B^* \subset A^*. \qquad (12.5)$$

2. В силу теоремы 12.1 и соотношения 12.5

$$\forall\, y \in D(B)\ \exists\, x \in D(A)\ \exists\, z_{\pm} \in N_{\pm i}(A^*)\ \ y = x + z_+ + z_-. \quad (12.6)$$

При этом в силу (12.2) представление (12.6) однозначно.

Пусть $T_{\pm i}(B)$ — проекция $D(B)$ на $N_{\pm i}(A^*)$ параллельно $D(A) \oplus N_{\mp i}(A^*)$. Тогда $T_{\pm i}(B) \subset N_{\pm i}(A^*)$. При этом

$$\mathbb{R} \ni (By, y) \overset{(12.5)}{=} (A^*y, y) \overset{\text{лем. }12.1}{\Longrightarrow} \|z_+\| = \|z_-\|.$$

3. Пусть $y_1, y_2 \in D(B) \overset{12.6}{\Longrightarrow} y_j = x_j + z_{+,j} + z_{-,j}$, где $x_j \in D(A)$, а $z_{\pm,j} \in T_{\pm i}$. Тогда в силу (12.5)

$$\mathbb{R} \ni \big(B(y_1 - y_2), y_1 - y_2\big) \overset{(12.5)}{=} \big(A^*(y_1 - y_2), y_1 - y_2\big) \overset{\text{лем. }12.1}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \|z_{+,1} - z_{+,2}\| = \|z_{-,1} - z_{-,2}\|.$$

Тем самым если $z_{+,1} = z_{+,2}$, то $z_{-,1} = z_{-,2}$ и в представлении (12.6) элемент $z_- \in T_{-i}(B)$ по $z_+ \in T_i(B)$ определяется однозначно. Поэтому правило $T_i(B) \ni z_+ \mapsto z_- \in T_{-i}(B)$ определяет $U_B$ — линейную изометрию $T_i(B)$ на $T_{-i}(B)$.

4. Пусть

$$D(B) \ni y \overset{(12.6)}{=} x + z_+ + U_B z_+,\ x \in D(A),\ z_+ \in T_i(B).$$

Тогда $By \overset{(12.5)}{=} Ax + iz_+ - iU_B z_+$, а $(B + iI)y = (A + iI)x + 2iz_+$.

Поскольку $T_i(B) \subset N_i(A^*)$, то в силу (12.1) $Im\,(A + iI)x \perp T_i(B)$. Тем самым $(A + iI)x \perp 2iz_+$. Поэтому

$$Im\,(B + iI) \subset Im\,(A + iI) \oplus T_i(B).$$

5. Взяв произвольные $x \in D(A)$, $z_+ \in T_i(B)$ и положив

$$y := x + \frac{1}{2i} z_+ + \frac{1}{2i} U_B z_+,$$

получим $(B + iI)y = (A + iI)x + z_+$. Тем самым

$$Im\,(B + iI) \supset Im\,(A + iI) \oplus T_i(B).$$

Аналогично доказывается и второе равенство из (12.4).

6. Последнее утверждение доказываемой теоремы есть следствие утверждения 1.6 и п. 3 теоремы 9.2, поскольку $Im\,(A \pm iI) \perp T_{\pm i}(B)$. ■

**Утверждение 12.1.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство над полем* $\mathbb{C}$, $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H)$, $sym\mathfrak{L}(H) \ni B$ *— симметрическое расширение оператора* $A$, *а* $n_{\pm}(A) \in \mathbb{Z}_{+}$. *Тогда*:

1. $N_{\pm i}(A^{*}) = N_{\pm i}(B^{*}) \oplus T_{\pm i}(B)$.

2. $n_{\pm}(B) \leqslant n_{\pm}(A)$.

3. $n_{+}(B) - n_{-}(B) = n_{+}(A) - n_{-}(A)$.

4. *У оператора* $A$ *есть максимальное симметрическое расширение* $B$ $(n_{+}(B)n_{-}(B) = 0)$.

**Доказательство.** $\boxed{1}$. 1.1. Так как $n_{\pm}(A) \in \mathbb{Z}_{+}$, то в силу предыдущей теоремы $B$ — замкнутый оператор. Поэтому в силу п. 3 теоремы 9.2 $Im\,(B \pm iI)$ — подпространства.

1.2. Тогда

$$N_{\pm i}(B) = Ker\,(B^{*} \mp iI) = \big(Im\,(B \pm iI)\big)^{\perp} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_{\pm i}(B)^{\perp} = Im\,(B \pm iI) \overset{(12.4)}{=} Im\,(A \pm iI) \oplus T_{\pm i}(B) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H = Im\,(A \pm iI) \oplus T_{\pm i}(B) \oplus N_{\pm i}(B) = \\ = Im\,(A \pm iI) \oplus N_{\pm i}(A) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_{\pm i}(A^{*}) = N_{\pm i}(B^{*}) \oplus T_{\pm i}(B).$$

$\boxed{2, 3}$. Справедливость этих соотношений следует из п. 1 доказываемого утверждения.

$\boxed{4}$. Пусть $n_{+}(A)n_{-}(A) > 0$. Тогда найдутся $\overset{o}{z}_{\pm} \in N_{\pm i}(A)$ такие, что $\| \overset{o}{z}_{\pm} \| = 1$. Рассмотрим $T_{\pm i} := \langle \overset{o}{z}_{\pm} \rangle$ и $U(\lambda \overset{o}{z}_{+}) := \lambda \overset{o}{z}_{-}$. Тогда $U$ — изометрия $T_i$ на $T_{-i}$. Поэтому оператор $B$, определенный по формулам (12.3), есть симметрическое расширение оператора $A$ и $n_{\pm}(B) = n_{\pm}(A) - 1$.

Действуя таким образом, за конечное число шагов дойдем до такого расширения $B'$ оператора $A$, что $n_{+}(B')n_{-}(B') = 0$. ■

**Пример 12.1.** Пусть $A_0$, $A_\alpha$, $(|\alpha| = 1)$ и $A_2$ — операторы, действующие в $L_2(0;1)$, которые рассмотрены в главе 11:

$$D(A_0) := \{\, x \in H^1(0;1) : \, x(0) = x(1) = 0 \,\},$$

$$D(A_\alpha) := \{\, x \in H^1(0;1) : \, x(0) = \alpha x(1) \,\},$$

$$D(A_2) := H^1(0;1) \text{ и } \ Ax(\cdot) := ix'(\cdot).$$

В главе 11 было показано, что $A_2 = A_0^*$ и каждый $A_\alpha$ есть самосопряженное расширение симметрического оператора $A_0$. Покажем, что других самосопряженных расширений у оператора $A_0$ нет.

Найдем $N_{\pm i}(A_0^*) = Ker\,(A_2 \mp iI)$. Пусть $(A_2 - iI)x = 0$. Тогда $ix' - ix = 0 \Longrightarrow x(t) = Ce^t$, т. е. $n_+(A_0) = 1$.

Аналогично если $(A_2 + iI)x = 0$, то $x(t) = Ce^{1-t}$ и $n_-(A_0) = 1$. Положим $T_{\pm i} := N_{\pm i}(A_0^*)$. Поскольку

$$\|e^t\|_{L_2(0;1)} = \|e^{1-t}\|_{L_2(0;1)},$$

то любая изометрия $T_i$ на $T_{-i}$ определяется по формуле $U_\beta(Ce^t) := \beta Ce^{1-t}$, где $|\beta| = 1$.

Пусть $B_\beta$ — симметрическое расширение, порожденное $T_i$, $T_{-i}$ и $U_\beta$. Тогда в силу (12.3)

$$D(B_\beta) \ni y \Longleftrightarrow y(t) = x(t) + Ce^t + C\beta e^{1-t}.$$

Простым вычислением получим, что $B_\beta y = iy'$. При этом $y(0) = C(1 + \beta e)$, а $y(1) = C(e + \beta)$. Поэтому

$$y(0) = y(1)\frac{1 + \beta e}{e + \beta} = \alpha y(1), \text{ где } \alpha = \frac{1 + \beta e}{e + \beta}. \text{ Но}$$

$$|\alpha| = \left|\frac{1 + \beta e}{e + \beta}\right| = \left|\frac{1 + \beta e}{e + \overline{\beta}}\right| = [\overline{\beta} = \beta^{-1}] = \left|\frac{1 + \beta e}{e + \beta^{-1}}\right| =$$

$$= |\beta| \cdot \left|\frac{1 + \beta e}{\beta e + 1}\right| = 1. \text{ Тем самым } B_\beta = A_\alpha.$$

**Пример 12.2.** Рассмотрим оператор $A$, действующий в $L_2(0;+\infty)$ и определенный следующим образом:

$$D(A) := \{x(\cdot) \text{ — абсолютно непрерывна на } [0;+\infty) : \\ x(\cdot), x'(\cdot) \in L_2(0;+\infty), x(0) = 0\}, \\ \forall\, x \in D(A)\ Ax := ix'.$$

Тогда $A$ — симметрический замкнутый линейный оператор, и оператор $A^*$, в силу (10.7), имеет вид

$$D(A^*) = \{x(\cdot) \text{ — абсолютно непрерывна на } [0;+\infty) : \\ x(\cdot), x'(\cdot) \in L_2(0;+\infty)\}, \\ \forall\, x \in D(A)\ A^*x = ix'.$$

Найдем $N_{\pm i}(A*) = Ker\,(A^* \mp iI)$.

Пусть $(A^* - iI)x = 0$. Тогда $ix' - ix = 0 \Longrightarrow x(t) = Ce^t$. Но если $C \neq 0$, то $Ce^t \notin L_2(0;+\infty)$, поэтому $N_i(A^*) = \{0\}$.

Аналогично если $(A_2 + iI)x = 0$, то $x(t) = Ce^{-t}$ и $Ce^{-t} \in L_2(0;+\infty)$ при любом $C$. Тем самым $N_{-i}(A^*) = \langle e^{-t}\rangle$ и $n_+(A) = 0 \neq 1 = n_-(A)$. Поэтому у оператора $A$ нет симметрических расширений.

# 13. Спектры симметрических операторов

В данной главе рассматривается гильбертово пространство $H$ над полем $\mathbb{C}$.

**Теорема 13.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in drd\mathfrak{L}(H)$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\lambda \in \rho(A)$.
2. $(A - \lambda I)$ *строго отделен от нуля, и* $Im\,(A - \lambda I) = H$.
3. $Ker\,(A^* - \overline{\lambda} I) = \{0\}$, $A$ *— замкнутый оператор, и оператор* $(A - \lambda I)$ *строго отделен от нуля.*

**Доказательство.** $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. В этом случае

$$\forall\, x \in D(A)\, \|(A - \lambda I)x\| \geqslant \frac{1}{\|(A - \lambda I)^{-1}\|}\|x\|.$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$. Данное утверждение следует из равенства (8.5) и п. 7 теоремы 8.1.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$. В силу (2.1) оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ непрерывен на $Im\,(A - \lambda I)$, а в силу замкнутости оператора $(A - \lambda I)$ справедливо равенство $Im\,(A - \lambda I) \overset{(8.5)}{=} \big(Ker\,(A^* - \overline{\lambda} I)\big)^{\perp}$. Тем самым $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Longrightarrow \lambda \in \rho(A)$. ■

**Следствия.** Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sa\mathfrak{L}(H)$ — самосопряженный линейный оператор. Тогда:

1. $\lambda \in \rho(A) \Longleftrightarrow \big((A - \lambda I)$ строго отделен от нуля$\big)$.
2. $\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \exists\, \{\, x_n \,\} \subset D(A)\ \ \|x_n\| = 1 \wedge (A - \lambda I)x_n \to 0$.

**Доказательство.** $\boxed{1.\ \Longleftarrow}$. Поскольку $A$ — замкнутый оператор, то в силу теоремы 13.1 надо проверить только равенство $Ker\,(A^* - \overline{\lambda} I) = \{0\}$.

Так как оператор $(A - \lambda I)$ строго отделен от нуля, то

$$Ker\,(A - \lambda I) = \{0\}. \tag{13.1}$$

Если $Ker\,(A^* - \overline{\lambda} I) \neq \{0\}$, то $\overline{\lambda}$ — собственное число оператора $A^* = A$. Поэтому $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ и $\overline{\lambda} = \lambda$, что противоречит равенству (13.1). ∎

**Утверждение 13.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H)$, $\lambda = \nu + i\mu$ и $\mu \neq 0$. Тогда*

$$\lambda \in \rho(A) \Longleftrightarrow Ker\,(A^* - \overline{\lambda} I) = \{0\}.$$

**Доказательство.** Справедливость этого утверждения следует из равенства (9.1) и теоремы 13.1. ∎

**Утверждение 13.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H)$. Тогда*

$$A \in sa\mathfrak{L}(H) \Longleftrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** $\boxed{\Longrightarrow}$. Справедливость этого утверждения вытекает из равенства (9.1) и первого следствия теоремы 13.1.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Поскольку $\pm i \in \rho(A)$, то $Im\,(A^* \pm iI) = H$. Поэтому по теореме 9.3 оператор $A$ — самосопряженный. ∎

**Теорема 13.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H)$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\mu_0 := \mathfrak{Im}\,\lambda_0 \neq 0$ и $Ker\,(A^* - \lambda_0 I) = \{0\}$. Тогда*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C} \;\; \mathfrak{Im}\,\lambda_0 \cdot \mathfrak{Im}\,\lambda > 0 \Longrightarrow Ker\,(A^* - \lambda I) = \{0\}.$$

**Доказательство.** 1. Пусть $Ker\,\big(A^* - (\lambda_0 + \Delta\lambda I)\big) \neq \{0\}$. Тогда найдется $y_0$ такой, что $\|y_0\| = 1$ и

$$\big(A^* - (\lambda_0 + \Delta\lambda I)\big) y_0 = 0. \tag{13.2}$$

Но в силу замкнутости оператора $A$ получим

$$Im\,(A-\overline{\lambda_0}I)=\big(Ker\,(A^*-\lambda_0 I)\big)^{\perp}=H.$$

Тем самым найдется $0\neq x_0\in D(A)$ такой, что

$$y_0=(A-\overline{\lambda_0}I)x_0. \tag{13.3}$$

Из равенства (13.3) в силу (9.1) получим

$$\|y_0\|\geqslant|\mu_0|\cdot\|x_0\|. \tag{13.4}$$

Из равенств (13.2) и (13.3) следует, что

$$\Big(\big(A^*-(\lambda_0+\Delta\lambda)I\big)y_0,x_0\Big)=$$

$$=\big(y_0,(A-\overline{\lambda_0})x_0\big)-(\Delta\lambda y_0,x_0)=\|y_0\|^2-\Delta\lambda(y_0,x_0).$$

Поэтому

$$|\mu_0|\cdot\|x_0\|\overset{(13.4)}{\leqslant}\|y_0\|=1=\|y_0\|^2=|\Delta\lambda|\cdot|(y_0,x_0)|\overset{(1.1)}{\leqslant}$$

$$\leqslant|\Delta\lambda|\cdot\|y_0\|\cdot\|x_0\|=|\Delta\lambda|\cdot\|x_0\|.$$

Тем самым $|\Delta\lambda|\geqslant|\mu_0|$. Отсюда следует, что

$$\forall\,\Delta\lambda\ \ \big(|\Delta\lambda|<|\mu_0|\Longrightarrow Ker\,\big(A^*-(\lambda_0+\Delta\lambda I)\big)=\{0\}. \tag{13.5}$$

2. Пусть $\mu_0>0$, $\lambda\in\mathbb{C}$ и $\mathfrak{Im}\,\lambda>0$. Разобьем отрезок $[\lambda_0;\lambda]$ точками $\{\,\lambda_j\,\}|_{j\in\overline{0,n}}\subset[\lambda_0;\lambda]$ $(\lambda_n=\lambda)$ на равные по длине части такие, что $|\lambda_{j+1}-\lambda_j|<\min\{\mu_0,\mathfrak{Im}\,\lambda\}$. Тогда в силу (13.5) получим

$$\{0\}=Ker\,(A^*-\lambda_0 I)=Ker\,(A^*-\lambda_1 I)=\ldots=$$

$$=Ker\,(A^*-\lambda_n I)=Ker\,(A^*-\lambda I).\ \blacksquare$$

**Следствие.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A\in sym\mathfrak{L}(H)\cap drd\mathfrak{L}(H)\cap cl\mathfrak{L}(H)$. Тогда*:

1. $\ \ i\in\rho(A)\Longrightarrow\mathbb{C}_{\mathfrak{Im}>0}\subset\rho(A)$.
2. $-i\in\rho(A)\Longrightarrow\mathbb{C}_{\mathfrak{Im}<0}\subset\rho(A)$.
3. $\ \ i\in\sigma(A)\Longrightarrow\mathbb{C}_{\mathfrak{Im}\geqslant0}\subset\sigma(A)$.
4. $-i\in\sigma(A)\Longrightarrow\mathbb{C}_{\mathfrak{Im}\leqslant0}\subset\sigma(A)$.

**Теорема 13.3.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in sym\mathfrak{L}(H) \cap drd\mathfrak{L}(H) \cap cl\mathfrak{L}(H)$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\mu_0 := \mathfrak{Im}\,\lambda_0 \neq 0$ и $dim\big(Ker\,(A^* - \lambda_0 I)\big) = n$. Тогда*

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{C} \;\; \mathfrak{Im}\,\lambda_0 \cdot \mathfrak{Im}\,\lambda > 0 \Longrightarrow dim\big(Ker\,(A^* - \lambda_0 I)\big) = n.$$

**Доказательство.** Предположим, что

$$dim\Big(Ker\,\big(A^* - (\lambda_0 + \Delta\lambda)I\big)\Big) > dim\big(Ker\,(A^* - \lambda_0 I)\big).$$

Тогда найдется линейно независимая система векторов $\{\,e_j\,\}_{j\in\overline{0,n+1}} \subset Ker\,\big(A^* - (\lambda_0 + \Delta\lambda)I\big)$. В силу равенства

$$H = Ker\,(A^* - \lambda_0 I) \oplus Im\,(A - \overline{\lambda_0} I)$$

найдутся системы векторов $\{\,f_j\,\}_{j\in\overline{0,n+1}} \subset Ker\,(A^* - \lambda_0 I)$ и $\{\,g_j\,\}_{j\in\overline{0,n+1}} \subset Im\,(A - \overline{\lambda_0} I)$ такие, что $\forall\,j \in \overline{0, n+1}$ $e_j = f_j + g_j$.

Тогда система векторов $\{\,f_j\,\}|_{j\in\overline{0,n+1}}$ линейно зависима, т. е. найдутся такие скаляры $\{\,\alpha_j\,\}_{j\in\overline{0,n+1}} \subset \mathbb{C}$, что $\sum\limits_{j=1}^{n+1} |\alpha_j| \neq 0$ и

$$0 \neq y_0 = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j f_j + \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j g_j = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j g_j \in Im\,(A - \overline{\lambda_0} I).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\|y_0\| = 1$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 13.2, получим, что в этом случае $|\Delta\lambda| \geqslant |\mu_0|$. Тем самым если $|\Delta\lambda| < |\mu_0|$, то

$$dim\Big(Ker\,\big(A^* - (\lambda_0 + \Delta\lambda)I\big)\Big) \leqslant dim\big(Ker\,(A^* - \lambda_0 I)\big).$$

Тогда при $|\Delta\lambda| \geqslant \min\{|\mu_0|, \mathfrak{Im}\,\lambda\}$ получим

$$dim\big(Ker\,(A^* - \lambda I)\big) \leqslant dim\big(Ker\,(A^* - \lambda_0 I)\big) \leqslant$$
$$\leqslant dim\big(Ker\,(A^* - \lambda I)\big). \;\; \blacksquare$$

**Пример 13.1.** Рассмотрим оператор $A$ из примера 12.2. Поскольку $N_i(A^*) = \{0\}$ и $N_{-i}(A^*) = \langle e^{-t} \rangle$, то $\sigma(A) = \mathbb{C}_{\mathfrak{Im} \geqslant 0}$.

# 14. Коммутирующие операторы

В этой главе рассматривается понятие коммутируемости двух линейных операторов, один из которых ограничен, а другой — оператор общего вида.

Отметим, что если $A \in \mathcal{L}(H)$ и $\lambda \in \rho(A)$, то

$$AR_A(\lambda) = R_A(\lambda)A.$$

Однако если $A \in \mathfrak{L}(H) \setminus \mathcal{L}(H)$ и $\lambda \in \rho(A)$, то

$$D(R_A(\lambda)A) = D(A) \neq H = D(AR_A(\lambda)).$$

**Определения.** Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in \mathfrak{L}(H)$ и $B \in \mathcal{L}(H)$.

1. Операторы $A$ и $B$ называются *перестановочными* или *коммутирующими*, если $BA \subset AB$, т. е.

$$\forall\, x \in D(A) \;\; Bx \in D(A) \text{ и } BAx = ABx.$$

2. Говорят, что оператор $A$ *сокоммутирует с оператором* $B$, если оператор $A$ перестановочен с любым ограниченным оператором $C \in \mathcal{L}(H)$, коммутирующим с оператором $B$.

**Утверждение 14.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in \mathfrak{L}(H)$, $\rho(A) \neq \varnothing$, а $\mathcal{L}(H) \ni R_A(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}$ $(\lambda \in \rho(A))$ — резольвента оператора $A$. Тогда справедливо тождество Гильберта для резольвенты оператора $A$*:

$$\forall\, \lambda, \mu \in \rho(A) \;\; R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu). \qquad (14.1)$$

**Следствие.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in \mathfrak{L}(H)$ и $\rho(A) \neq \varnothing$. Тогда*

$$\forall\, \lambda, \mu \in \rho(A) \;\; R_A(\lambda)R_A(\mu) = R_A(\mu)R_A(\lambda).$$

**Теорема 14.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A \in \mathfrak{L}(H)$, $\rho(A) \neq \varnothing$ и $B \in \mathcal{L}(H)$. Тогда:*

1. *Для любого $\lambda \in \rho(A)$ операторы $A$ и $R_A(\lambda)$ сокоммутируют.*

2. *Если операторы $A$ и $B$ коммутируют, то для любого $\lambda \in \rho(A)$ операторы $B$ и $R_A(\lambda)$ тоже коммутируют.*

3. *Если существует $\lambda_0 \in \rho(A)$ такое, что операторы $B$ и $R_A(\lambda_0)$ коммутируют, то коммутируют и операторы $A$ и $B$.*

**Доказательство.** $\boxed{1}$. Пусть $C \in \mathcal{L}(H)$,

$$CR_A(\lambda) = R_A(\lambda)C \text{ и } x \in D(A).$$

Поскольку $R_A(\lambda)$ отображает $H$ на $D(A)$, то существует $y \in H$ такой, что $x = R_A(\lambda)y$. Тогда

$$Cx = CR_A(\lambda)y = R_A(\lambda)Cy \in D(A).$$

При этом

$$ACx = ACR_A(\lambda)y = (A - \lambda I + \lambda I)R_A(\lambda)Cy =$$
$$= \big(I + \lambda R_A(\lambda)\big)Cy = Cy + \lambda R_A(\lambda)Cy = Cy + \lambda CR_A(\lambda)y =$$
$$= C(A - \lambda I)x + \lambda Cx = CAx.$$

$\boxed{2}$. Для любого $x \in H$ справедливы равенства

$$Bx = B(A - \lambda I)R_A(\lambda)x \overset{R_A(\lambda)x \in D(A)}{=} (A - \lambda)BR_A(\lambda)x.$$

Поэтому $B = (A - \lambda)BR_A(\lambda) \Longrightarrow R_A(\lambda)B = BR_A(\lambda)$.

$\boxed{3}$ Поскольку $BR_A(\lambda_0) = R_A(\lambda_0)B$, то для любого $x \in D(A)$ получим, что

$$R_A(\lambda_0)B(A - \lambda_0 I)x = Bx \in D(A) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B(A - \lambda_0 I)x = (A - \lambda_0 I)Bx \Longrightarrow BAx = ABx. \blacksquare$$

# 15. Несобственные операторные интегралы

В этой главе понятие операторного интеграла по отрезку обобщается до понятия несобственного операторного интеграла (т. е. операторного интеграла по неограниченному промежутку).

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $\{ A_n \} \subset \mathfrak{L}(H)$. Оператор $A := \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ задается следующим образом:

$$\begin{gathered} D(A) := \bigl\{x : \{A_n x\} - \text{сходится}\bigr\}, \\ \forall\, x \in D(A) \;\; Ax := \lim_{n\to+\infty} A_n x. \end{gathered} \tag{15.1}$$

**Лемма 15.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $\underline{\forall\, n \in} \mathbb{N}\;\; H \supset H_{n+1} \supset H_n$ — подпространства пространства $H$, $\bigcup\limits_n H_n = H$, $P_n := Pr_{H_n}$, $A_n \in sa\mathcal{L}(H)$ и*

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}\, A_{n+m} P_n = A_n P_n = A_n.$$

*Тогда $A := \lim\limits_{n\to\infty} A_n \in sa\mathfrak{L}(H)$.*

**Доказательство.** 1. В силу условий леммы и соотношения (4.2)

$$\forall\, x \in H \;\; P_n x \to x. \tag{15.2}$$

2. Пусть $x, y \in D(A)$. Тогда

$$(Ax, y) \overset{(15.1)}{=} \lim_{n\to+\infty} (A_n x, y) = \lim_{n\to+\infty} (x, A_n y) \overset{(15.1)}{=} (x, Ay).$$

Тем самым $A \in sym\mathfrak{L}(H)$.

3. Так как $A_nP_mx \overset{n\geq m}{=} A_mP_mx$, то $H_n \subset D(A)$. При этом

$$AP_m = A_mP_m = A_m. \tag{15.3}$$

Поэтому $A$ — плотно определенный оператор. В силу предыдущего пункта доказательства из этого следует, что $A \subset A^*$.

4. В силу равенств (15.3) и п. 6 утверждения 8.6

$$(AP_m)^* = A_m^* = A_m \supset P_mA^*.$$

Поэтому для любого $y \in D(A^*)$ справедливо соотношение

$$A_ny = P_nA^*y \overset{(15.2)}{\to} A^*y,$$

т. е. $y \in D(A) \Longrightarrow A^* = A$. ■

**Лемма 15.2.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство,* $\underline{\forall\, n \in} \mathbb{N}\;\; H \supset H_{n+1} \supset H_n$ *— подпространства пространства* $H$*,* $\bigcup\limits_n H_n = H$*,* $P_n := Pr_{H_n}$*,* $A \in sa\mathfrak{L}(H)$ *и*

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}\;\; P_nAP_n = AP_n.$$

*Тогда* $A := \lim\limits_{n\to\infty} AP_n$.

**Доказательство.** Пусть $A_n := P_nAP_n = AP_n$.

Тогда $\{ A_n \}$ удовлетворяет всем условиям леммы 15.1. Поэтому $\widetilde{A} := \lim\limits_{n\to+\infty} AP_n \in sa\mathfrak{L}(H)$. Если $x \in D(\widetilde{A})$, то $AP_nx \to \widetilde{A}x$ и $P_nx \overset{15.2}{\to} x$. Но $A$ — замкнутый оператор, поэтому

$$x \in D(A) \text{ и } Ax = \widetilde{A}x.$$

Отсюда следует, что $\widetilde{A} \subset A$. Тогда в силу п. 3 утверждения 9.2 справедливо равенство $\widetilde{A} = A$. ■

**Лемма 15.3.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство,* $\underline{\forall\, n \in} \mathbb{N}\;\; H \supset H_{n+1} \supset H_n$ *— подпространства пространства* $H$*,* $\bigcup\limits_n H_n = H$*,* $A_n \in sa\mathcal{L}(H_n)$ *и*

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \ \Big(m \geqslant n \Longrightarrow A_m\Big|_{H_n} = A_n\Big).$$

*Тогда существует единственный линейный оператор* $A \in sa\mathfrak{L}(H)$ *такой, что* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ A\Big|_{H_n} = A_n$.

**Доказательство.** 1. Пусть $\widetilde{A}_n := P_n A_n P_n = A_n P_n$.

Тогда $\{\, \widetilde{A}_n \,\}$ удовлетворяет всем условиям леммы 15.1. Поэтому

$$A := \lim_{n\to+\infty} \widetilde{A}_n = \lim_{n\to+\infty} A_n P_n \in sa\mathfrak{L}(H)$$

и $AP_n = A_n P_n$. Тем самым $A\Big|_{H_n} = A_n$.

2. Единственность такого оператора следует их леммы 15.2. Отметим, что $D(A) := \big\{x : \{A_n P_n x\} - \text{сходится}\big\}$. ■

**Лемма 15.4.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство,* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ H_n$ *— подпространства гильбертова пространства* $H$,

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \ \Big(n \neq m \Longrightarrow H_n \perp H_m\Big),\ \overline{\langle \bigcup_n H_n \rangle} = H$$

*и* $A_n \in sa\mathcal{L}(H_n)$. *Тогда существует единственный оператор* $A \in sa\mathfrak{L}(H)$ *такой, что* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ A\Big|_{H_n} = A_n$. *При этом*

$$\begin{gathered} D(A) := \{x : \sum_{k=1}^{\infty} \big\|A_n P_n x\big\|^2 - \textit{сходится}\}, \\ \forall\, x \in D(A)\ \ Ax := \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n x. \end{gathered} \tag{15.4}$$

**Доказательство.** Пусть $P_n := Pr_{H_n}$. Тогда

$$P_n P_m = \delta_{n,m} P_n. \tag{15.5}$$

Определим подпространства $\widetilde{H}_n$ и операторы $\widetilde{A}_n \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_n)$ следующим образом:

$$\widetilde{H}_n := \sum_{k=1}^{n} H_k,\ \widetilde{A}_n x := \sum_{k=1}^{n} A_k P_k x \text{ при } x \in \widetilde{H}_n.$$

Тогда для $\{ \widetilde{H}_n \}$ и $\{ \widetilde{A}_n \}$ выполняются все условия леммы 15.3. Поэтому существует оператор $A \in sa\mathfrak{L}(H)$ такой, что $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ A\Big|_{\widetilde{H}_n} = \widetilde{A}_n$. При этом

$$\forall\, x \in H_n \subset \widetilde{H}_n\ \ Ax = \widetilde{A}_n x = \sum_{k=1}^{n} A_k P_k x \overset{(15.5)}{=} A_n x, \qquad (15.6)$$

поэтому $H_n \subset D(A)$ и $\widetilde{A}_n Pr_{\widetilde{H}_n} x \overset{(15.6)}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k P_k x$. Таким образом, справедлива следующая цепочка эквивалентностей:

$$x \in D(A) \iff \Big(\widetilde{A}_n Pr_{\widetilde{H}_n} x = \sum_{k=1}^{n} A_k P_k x \text{ — сходится при } n \to +\infty\Big) \overset{(1.3)}{\iff} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \big\|A_k P_k x\big\|^2\Big) \text{ — сходится. } \blacksquare$$

Доказанные леммы позволяют определить несобственные операторные интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda$.

Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разбиение единицы в гильбертовом пространстве $H$, а функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \ f \in \mathcal{I}[a; b]$.

Возьмем две последовательности $\{ a_n \}, \{ b_n \} \subset \mathbb{R}$ такие, что $a_n \to -\infty$, а $b_n \to +\infty$.

Пусть $H_n := Im\,(I_{b_n} - I_{a_n})$, а $P_n := I_{b_n} - I_{a_n}$. Тогда операторы $F_n := \int\limits_{a_n}^{b_n} f(\lambda)\, dI_\lambda$ и $P_n$ удовлетворяют всем условиям леммы 15.1. Поэтому $F := \lim\limits_{n \to +\infty} F_n \in sa\mathfrak{L}(H)$.

**Определение.** Оператор $F$ называется *интегралом от функции $f$ по $\{ I_\lambda \}$* и обозначается $F := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda := \lim_{n \to +\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(\lambda)\, dI_\lambda \qquad (15.7)$$

**Лемма 15.5.** *Пусть* $\{ I_\lambda \}$ — *разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$, *а функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такова, что* $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \ f \in \mathcal{I}[a;b]$. *Определение (15.7) интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda$ *корректно, т. е. не зависит от последовательностей* $\{ a_n \}$ *и* $\{ b_n \}$.

**Доказательство.** 1. Пусть $F = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(\lambda)\, dI_\lambda$, а

$$\widetilde{F} = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-n}^{n} f(\lambda)\, dI_\lambda,\ H_n := Im\big(I_n - I_{-n}\big),\ P_n := I_n - I_{-n}.$$

Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ такого, что $a_m \leqslant -n < n \leqslant b_m$, в силу п. 2 теоремы 6.5 получим

$$P_n \int\limits_{a_m}^{b_m} f(\lambda)\, dI_\lambda P_n = \int\limits_{a_m}^{b_m} f(\lambda)\, dI_\lambda P_n = \int\limits_{-n}^{n} f(\lambda)\, dI_\lambda.$$

Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$P_n \widetilde{F} P_n = \widetilde{F} P_n = P_n F P_n = F P_n.$$

Тем самым по лемме 15.2 справедливы равенства

$$F = \lim_{n\to+\infty} F P_n = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{F} P_n = \widetilde{F}. \ \blacksquare$$

**Определение.** Если $f(\cdot) = g(\cdot) + ih(\cdot)$, где $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ — вещественнозначные функции, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, dI_\lambda + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, dI_\lambda.$$

Таким образом, в силу определения

$$D\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda\Big) := \Big\{ x :\ \int\limits_{-n}^{n} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x \text{ — сходится при } n \to \infty \Big\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \subset D\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda\Big),$$

$$\forall\, x \in D\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda\Big)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-n}^{n} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x.$$

**Определение.** Множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $\forall\, a, b \in \mathbb{N}\ \ f \in \mathcal{I}[a;b]$, обозначим $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

**Теорема 15.1.** *Пусть* $\{\, I_\lambda \,\}$ *— разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$. *Тогда:*

1. *Если* $f, g \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, *то* $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \big(\alpha f(\cdot) + \beta g(\cdot)\big) \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ *и*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)\big)\, d\, I_\lambda = \alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda + \beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d\, I_\lambda .$$

2. *Если* $f, g \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, *то* $f(\cdot) g(\cdot) \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

*При этом для любого* $x$ *из*

$$D\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda\Big) \cap D\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d\, I_\lambda\Big) \cap D\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f(\lambda) g(\lambda)\big)\, d\, I_\lambda\Big)$$

*справедливо равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f(\lambda) g(\lambda)\big)\, d\, I_\lambda x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d\, I_\lambda x .$$

3. *Если* $f \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, *то* $\overline{f} \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ (*здесь* $\overline{f}$ *— комплексно сопряженная к* $f$ *функция*) *и*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda)\, d\, I_\lambda = \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda\Big)^{*}.$$

4. *Если* $f \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ *и* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ f(\lambda) \geqslant 0$, *то* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda \geqslant 0$.

5. *Если* $f, g \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ *и* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ f(\lambda) \geqslant g(\lambda)$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda \geqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d\, I_\lambda .$$

6. *Если* $f \in C(\mathbb{R})$, *то*

$$D\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda\Big) = \Big\{x \in H : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\, d\, \|I_\lambda x\|^2 \text{ — сходится}\Big\},$$

$$\forall\, x \in D\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda\Big)\ \ \Big\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda x\Big\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\, d\, \|I_\lambda x\|^2 .$$

**Доказательство.** $\boxed{6}$. Примем обозначение

$$F := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda.$$

Поскольку $D(F) = \{x : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x$ — сходится$\}$, то

$$x \in D(A) \Longleftrightarrow \Bigl(\Bigl\{ \int\limits_{-n}^{n} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x \Bigr\} \text{ — фундаментальна}\Bigr) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Biggl[\Bigl\| \int\limits_{-n-p}^{n+p} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x - \int\limits_{-n}^{n} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x \Bigr\|^2 =$$

$$= \Bigl\| \int\limits_{-n-p}^{-n} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x - \int\limits_{n}^{n+p} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x \Bigr\|^2 =$$

$$= \Bigl\| \int\limits_{-n-p}^{-n} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x \Bigr\|^2 + \Bigl\| \int\limits_{n}^{n+p} f(\lambda)\, dI_\lambda\, x \Bigr\|^2 \overset{(6.7)}{=}$$

$$= \int\limits_{-n-p}^{-n} |f(\lambda)|^2\, d\, \|I_\lambda\, x\|^2 + \int\limits_{n}^{n+p} |f(\lambda)|^2\, d\, \|I_\lambda\, x\|^2 =$$

$$= \int\limits_{-n-p}^{n+p} |f(\lambda)|^2\, d\, \|I_\lambda\, x\|^2 - \int\limits_{-n}^{n} |f(\lambda)|^2\, d\, \|I_\lambda\, x\|^2 \Biggr] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Bigl(\Bigl\{ \int\limits_{-n}^{n} |f(\lambda)|^2\, d\, \|I_\lambda\, x\|^2 \Bigr\} \text{ — фундаментальна}\Bigr) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Bigl\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\, (d\, \|I_\lambda\, x\|^2 \Bigr\} \text{ — сходится.} \ \blacksquare$$

**Утверждение 15.1.** *Пусть* $\{\, I_\lambda \,\}$ *— разбиение единицы в гильбертовом пространстве* $H$, $f(\cdot) \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ *и* $\varphi : \mathbb{R} \to (\alpha; \beta)$ *— строго возрастающая непрерывная биекция* $\mathbb{R}$ *на* $(\alpha; \beta)$. *Тогда семейство ортопроекторов*$\{\, \widetilde{I}_\mu \,\}$, *определенное следующим образом:*

$$\widetilde{I}_\mu := \begin{cases} O, & \mu \leqslant \alpha, \\ I_{\varphi(\mu)}, & \mu \in (\alpha; \beta), \\ I, & \mu \geqslant \beta \end{cases}$$

*является разбиением единицы в гильбертовом пространстве* $H$. *При этом*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\, I_\lambda = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(\mu)\big)\, d\, \widetilde{I}_\mu.$$

# 16. Спектральное разложение неограниченного самосопряженного оператора

В этой главе рассматривается спектральное разложение неограниченных самосопряженных операторов.

**Теорема 16.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sa\mathfrak{L}(H)$. Тогда существует такое разбиение единицы $\{I_\lambda\}$, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $I_\lambda$ скоммутирует с $A$ и $A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dI_\lambda$.*

**Доказательство.** 1. По теореме 9.4 существуют операторы $B, C \in \mathcal{L}(H)$ такие, что

$$I \geqslant B = (I + A^2)^{-1} \geqslant 0, \quad C = AB, \quad \|C\| \leqslant 1. \tag{16.1}$$

Поскольку $\pm i \in \rho(A)$, то

$$B = (A - iI)^{-1}(A + iI)^{-1} = R_A(i)R_A(-i) \overset{(14.1)}{=}$$
$$= \tfrac{i}{2}\big(R_A(-i) - R_A(i)\big),$$
$$C = AB = A \cdot \tfrac{i}{2}\big(R_A(-i) - R_A(i)\big) =$$
$$= \tfrac{i}{2}\big((A + iI - iI) \cdot R_A(-i) - (A - iI + iI) \cdot R_A(i) =$$
$$= \tfrac{i}{2}\big(I - iR_A(-i) - I - iR_A(i)\big) = \tfrac{1}{2}\big(R_A(-i) + R_A(i)\big).$$

В силу соотношений (16.1) $Im\, B \subset D(A)$.

2. Пусть $\{\,\widetilde{I}_\lambda\,\}$ — разложение единицы, порожденное самосопряженным ограниченным оператором $B$. Так как в силу (16.1) $0 \leqslant B \leqslant I$, то $\{\,\widetilde{I}_\lambda\,\}$ сосредоточено на $[0; 1+\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon$ — достаточно малое число.

Поскольку $Ker\, B = \{0\}$, то $0 \notin \sigma_d(B)$. Тем самым по теореме 7.4 точка 0 есть точка непрерывности $\{\,\widetilde{I}_\lambda\,\}$. Поэтому

$$\widetilde{I}_{-0} = \widetilde{I}_0 = \widetilde{I}_{+0} = 0. \tag{16.2}$$

3. Пусть

$$P_n := \widetilde{I}_{1/n} - \widetilde{I}_{1/(n+1)},\; H_n := Im\, P_n \text{ при } n \geqslant 2, \text{ а}$$

$$P_1 := I - \widetilde{I}_{1/2},\; H_1 := Im\, P_1.$$

Тогда $H_n \perp H_m$ при $n \neq m$. Поскольку операторы $B$ и $C$ коммутируют, то в силу свойств разложения единицы, порожденного оператором $B$, при любом $n \in \mathbb{N}$ операторы $P_n$, $B$ и $C$ коммутируют между собой.

4. Так как при любом $x \in H$

$$\sum_{n=1}^{N} P_n x = \big(I - \widetilde{I}_{1/(N+1)}\big)x \overset{(16.2)}{\to} x, \text{ то}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = I. \tag{16.3}$$

5. Рассмотрим операторы $\widehat{B}_n := \int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} \lambda^{-1}\, d\widetilde{I}_\lambda$ и

$$B_n := \int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} \lambda\, d\widetilde{I}_\lambda \overset{\text{п. 3 теор. 7.2}}{=} BP_n. \tag{16.4}$$

Тогда

$$B_n\widehat{B}_n \overset{\text{п. 2 теор. 7.2}}{=} \int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} d\widetilde{I}_\lambda = P_n \tag{16.5}$$

и для любого $x \in H$

$$P_n x = B_n\widehat{B}_n x \overset{(16.4)}{=} BP_n\widehat{B}_n x \in Im\, B \overset{1}{\subset} D(A).$$

При этом

$$AP_nx \overset{(16.5)}{=} AB_n\widehat{B}_nx \overset{(16.4)}{=} ABP_n\widehat{B}_nx \overset{(16.1)}{=}$$

$$= CP_n\widehat{B}_nx \overset{3}{=} P_nC\widehat{B}_nx \in H_n.$$

Поэтому $H_n$ — инвариантное подпространство оператора $A$.

6. Рассмотрим операторы $A_n := A\Big|_{H_n}$ как операторы, действующие в $H_n$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ оператор $A_n$ — симметрический оператор, определенный на всем гильбертовом пространстве $H_n$. Поэтому по теореме 2.1 $A_n \in \mathcal{L}(H_n)$.

7. По теореме 5.1 каждый оператор $A_n$ порождает разложение единицы $\{ \overset{n}{I}_\lambda \} \subset \mathcal{L}(H_n)$. При этом $\overset{n}{I}_\lambda = 0$ при $\lambda \leqslant \big(-\|A_n\|\big)$, и $\overset{n}{I}_\lambda = P_n\Big|_{H_n}$ при $\lambda > \|A_n\|$ и

$$A_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d \overset{n}{I}_\lambda. \tag{16.6}$$

8. Поскольку для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \overset{n}{I}_\lambda P_nx \Big\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|P_nx\|^2 = \|x\|^2,$$

то в силу утверждения 1.2 при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $I_\lambda$, определенный равенством

$$I_\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} \overset{n}{I}_\lambda P_n, \tag{16.7}$$

есть ограниченный самосопряженный оператор и

$$I_\lambda P_n = \overset{n}{I}_\lambda P_n. \tag{16.8}$$

Покажем, что для любого $\lambda$ выполняется равенство $I_\lambda^2 = I_\lambda$:

$$I_\lambda^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{n}{I}_\lambda\, P_n I_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{n}{I}_\lambda\, P_n\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \overset{m}{I}_\lambda\, P_m x\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overset{n}{I}_\lambda \sum_{m=1}^{\infty} P_n \overset{m}{I}_\lambda\, P_m x \overset{Im\, \overset{m}{I}_\lambda \subset H_m}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overset{n}{I}_\lambda\, P_n \overset{n}{I}_\lambda\, P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{n}{I}_\lambda\, P_n x = I_\lambda x.$$

Тем самым $I_\lambda$ — ортопроектор.

9. Пусть $\mu > \lambda$, тогда

$$\big((I_\mu - I_\lambda)x, x\big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (\overset{n}{I}_\mu - \overset{n}{I}_\lambda)P_n x, x\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big((\overset{n}{I}_\mu - \overset{n}{I}_\lambda)P_n x, P_n x\Big) \geqslant [\overset{n}{I}_\mu - \overset{n}{I}_\lambda \geqslant 0] \geqslant 0 \Longrightarrow I_\mu \geqslant I_\lambda$$

и, в частности, $I_{\lambda-0} \leqslant I_\lambda$.

10. В силу (16.7) $I_\lambda x = \sum_{n=1}^{N} \overset{n}{I}_\lambda\, P_n x + r_{N,\lambda}(x)$, где $r_{N,\lambda}(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \overset{n}{I}_\lambda\, P_n x$, и

$$\big\|r_{N,\lambda}(x)\big\|^2 \leqslant r_N(x)^2 := \sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{16.9}$$

Рассмотрим неравенство

$$0 \leqslant \Big\|I_\lambda x - \sum_{n=1}^{N} \overset{n}{I}_\lambda\, P_n x\Big\| \leqslant r_N(x). \tag{16.10}$$

Переходя в неравенстве (16.10) к пределу при $\lambda \to \mu - 0$ ($\lambda \to -\infty$, $\lambda \to +\infty$), а затем к пределу при $N \to +\infty$, с учетом соотношений (16.9) получим

$$I_{\mu-0} x = \sum_{n=1}^{\infty} I_m u P_n x \overset{(16.7)}{=} I_\mu x,\ \lim_{\lambda\to-\infty} I_\lambda = 0,\ \lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda = I.$$

Тем самым $\{ I_\lambda \}$ — разложение единицы.

12. Рассмотрим самосопряженный оператор $\widetilde{A} := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dI_\lambda$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{A} P_n x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dI_\lambda \, P_n x \overset{(16.8)}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d \overset{n}{I_\lambda} \; P_n x = A P_n x.$$

Тем самым по лемме 15.2 получим, что $\widetilde{A} = A$.

13. Отметим, что в силу п. 6 теоремы 15.1

$$x \in D(A) \Longleftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d(I_\lambda x, x) < +\infty. \;\blacksquare$$

**Определение.** Пусть $\{ \widetilde{I}_\lambda \}$ — разложение единицы в гильбертовом пространстве $H$, порожденное самосопряженным неограниченным оператором $A$, и $f(\cdot) \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$. Тогда, как и в случае ограниченного оператора, оператор $f(A)$ определяется формулой $f(A) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, dI_\lambda$.

**Пример 16.1.** Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разложение единицы в гильбертовом пространстве $H$, порожденное самосопряженным неограниченным оператором $A$. Тогда

$$e^{iA} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda} \, dI_\lambda = \cos A + i \sin A.$$

При этом в силу п. 6 теоремы 15.1

$$\forall \, x \in D\Big(e^{iA}\Big) \; \Big\| e^{iA} x \Big\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 1 \, d\|I_\lambda x\|^2 = \|x\|^2.$$

# 17. Унитарные операторы и их спектральное разложение

В этой главе рассматривается еще один класс линейных операторов, для которых имеется интегральное представление.

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство. Линейный оператор $U \in \mathfrak{L}(H)$ такой, что

$$U^*U = I = UU^*, \tag{17.1}$$

называется *унитарным.*

**Утверждение 17.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство. Линейный оператор $U \in \mathfrak{L}(H)$ унитарный тогда и только тогда, когда*

$$U \in \mathcal{L}(H) \text{ и } U^* = U^{-1}.$$

**Доказательство.** $\boxed{\Longrightarrow}$. В силу (17.1) $D(U) = H$ и $Im\, U^* = H$. Поэтому для любого $x \in H$

$$\|x\|^2 = (U^*Ux, x) = (Ux, Ux) = \|Ux\|^2. \ \blacksquare$$

**Теорема 17.1.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство $U \in \mathfrak{L}(H)$ и $D(U) = H$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *$U$ — унитарный оператор.*
2. *$Im\, U = H$ и $\forall\, x, y \in H$ $(Ux, Uy) = (x, y)$.*
3. *$Im\, U = H$ и $\forall\, x \in H$ $\|Ux\| = \|x\|$.*

**Доказательство.** $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. Для любых $x, y \in H$

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y).$$

При этом в силу (17.1) $Im\, U = H$.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$. Для любого $x \in H$

$$(Ux, Ux) = (x, U^*Ux) = (x, x).$$

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$. Так как $\|A\| = 1$, то и $A^* \in \mathcal{L}(H)$. Поэтому для любого $x \in H$

$$\|x\|^2 = (x, x) = \|Ux\|^2 = (Ux, Ux, ) = (U^*Ux, x).$$

Поскольку оператор $U^*U$ самосопряжен, то по следствию из теоремы 2.3 получим, что $I = U^*U$.

Так как $Im\, U = H$, то $U^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Longrightarrow U^{-1} = U$. ■

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство. Оператор $U : D(U) \subset H \to H$ называется *изометричным* или *изометрией*, если

$$\forall\, x \in D(U) \;\; \|Ux\| = \|x\|.$$

Отметим, что любой унитарный оператор изометричен.

**Пример 17.1.** Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sym\mathfrak{L}(H)$. Поскольку для любого $x \in D(A)$

$$\|(A + iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 = \|(A - iI)x\|^2,$$

то оператор $U_A : Im\,(A + iI) \to Im\,(A - iI)$, определенный правилом $U_A(A + iI)x = (A - iI)x$, есть линейная изометрия $Im\,(A + iI)$ на $Im\,(A - iI)$.

При этом если $y = (A + iI)x$, то $U_A y = (A - iI)(A + iI)^{-1}y$. Тем самым

$$U_A = (A - iI)(A + iI)^{-1}. \tag{17.2}$$

Отметим, что

$$D(U_A) = Im\,(A + iI),\; Im\, U_A = Im\,(A - iI). \tag{17.3}$$

**Утверждение 17.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A \in sym\mathfrak{L}(H)$ и оператор $U_A$ определен формулой* (17.2).

*Тогда $U_A$ — линейная изометрия и $Ker\,(U_A - I) = \{0\}$.*

**Доказательство.** Пусть $x \in Ker\,(U_A - I)$, тогда в силу равенств (17.3)

$$x \in Im\,(A + iU) \text{ и } U_A x = x.$$

Поэтому существует $y \in D(A)$ такой, что $x = (A + iI)y$. Тогда

$$0 = (U_A - I)x \overset{(17.2)}{=} (A - iI)(A + iI)^{-1}x - x =$$

$$= (A - iI)y - (A + iI)y = -2iy \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x = 0. \ \blacksquare$$

**Определение.** Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sym\mathfrak{L}(H)$.

Тогда оператор $U_A$, определенный формулой (17.2), называется *преобразованием Кэли оператора $A$*.

**Утверждение 17.3.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и оператор $U \in \mathfrak{L}(H)$ — изометрия. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $U \in cl\mathfrak{L}(H)$.
2. $D(U)$ *— замкнутое множество.*
3. $Im\,U$ *— замкнутое множество.*

**Доказательство.** $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$. Пусть $D(U) \ni x_n \to x_0$. Тогда $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Так как $U$ — изометрия, то $\{Ux_n\}$ — фундаментальная последовательность. Поэтому существует такое $y_0 \in H$, что $Ux_n \to y_0$. Отсюда в силу замкнутости оператора $U$ следует, что $x_0 \in D(U)$.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$. Пусть $Im\,U \ni y_n = Ux_n \to y_0$. Тогда $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Поэтому существует $x_0 \in D(U)$ такое, что $x_n \to x_0$. Отсюда следует, что

$$Ux_n \to Ux_0 = y_0 \in Im\,U.$$

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$. Так как оператор $U$ строго отделен от нуля, то в силу п. 4 утверждения 8.4 оператор $U$ является замкнутым. $\blacksquare$

**Следствие.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sym\mathfrak{L}(H)$. Тогда*

$$U_A \in cl\mathfrak{L}(H) \Longleftrightarrow A \in cl\mathfrak{L}(H).$$

**Доказательство.** $U_A \in cl\mathfrak{L}(H) \overset{\text{утв. 17.3}}{\Longleftrightarrow} D(U_A) \overset{(17.3)}{=}$ $= Im\,(A+iI)$ — замкнутое множество $\overset{\text{п. 3 теор. 9.2}}{\Longleftrightarrow} A \in cl\mathfrak{L}(H)$. ∎

Рассмотрим обратную задачу — по оператору $U_A$ восстановить оператор $A$.

Пусть $x \in D(A)$. Тогда

$$(I + U_A)(A + iI)x = Ax + ix + Ax - ix = 2Ax \text{ и}$$
$$(I - U_A)(A + iI)x = Ax + ix - Ax + ix = 2ix.$$

Поэтому в силу утверждения 17.2

$$Ax = \frac{1}{2}(I + U_A)(A + iI)x = \frac{1}{2}(I + U_A)2i(I - U_A)^{-1}x.$$

Тем самым

$$A = i(I + U_A)(I - U_A)^{-1}.$$

**Теорема 17.2.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Тогда*:

1. *Если $A \in sa\mathfrak{L}(H)$, то $U_A$ — унитарный оператор и $Ker\,(U_A - I) = \{0\}$.*

2. *Если $U \in \mathcal{L}(H)$, $Ker\,(U - I) = \{0\}$, $U$ — унитарный оператор и*

$$A_U := i(I + U)(I - U)^{-1}, \tag{17.4}$$

*то $A_U \in sa\mathfrak{L}(H)$.*

**Доказательство.** $\boxed{1}$. Так как $A = A^*$, то в силу утверждения 13.2 $\sigma(A) \subset \mathbb{R} \Longrightarrow (A \pm iI)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \overset{(17.3)}{\Longrightarrow} D(U_A) = H$ и

$Im\, U_A = H$. Поэтому в силу теоремы 17.1 и утверждения 17.2 оператор $U_A$ — унитарный.

$\boxed{2}$. 1. Так как $\mathcal{L}(H) \ni U$ — унитарный оператор и $Ker\,(U - I) = \{0\}$, то в силу п. 3 утверждения 2.2

$$\overline{D(A_U)} \overset{(17.4)}{=} \overline{Im\,(I - U)} = Ker\,(I - U^*)^{\perp} =$$

$$= Ker\,(I - U^{-1})^{\perp} = Ker\,\big((U - I)\big)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H.$$

Тем самым оператор $A_U$ плотно определен, и поэтому существует оператор $A_U^*$.

2. Покажем, что оператор $A_U$ — симметрический.

Пусть $x, y \in D(A_U)$. Тогда существуют $v, w \in Im\,(I - U)$ такие, что $x = (I - U)v$, $y = (I - U)w$. Поэтому

$$(A_U x, y) = \big(i(I + U)v, (I - U)y\big) \overset{(17.1)}{=} i\big(v, (U^* - U)w\big).$$

Аналогично

$$(x, A_U y) = \big((I - U)v, i(I + U)y\big) \overset{(17.1)}{=} -i\big(v, (U - U^*)w\big).$$

3. $A_U + iI = i\big((I+U)(I-U)^{-1} + I\big) = 2i(I-U)^{-1}$. Аналогично $A_U - iI = 2i(U^* - I)^{-1}$.

Поэтому $Im\,(A_U + iI) = Im\,(2i(I - U)^{-1}) = D(I - U) = H$ и $Im\,(A_U - iI) = Im\,(2i(U^* - I)^{-1}) = D(U^* - I) = H \overset{\text{теор. 9.3}}{\Longrightarrow}$ $\Longrightarrow A_U \in sa\mathfrak{L}(H)$. ■

**Следствие.** *Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in sym\mathfrak{L}(H)$, а $U_A$ — оператор, определенный формулой* (17.2). *Тогда*

$$A \in sa\mathfrak{L}(H) \Longleftrightarrow (U_A \text{ — \textit{унитарный}}). \ \blacksquare$$

Пусть $H$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $U \in \mathcal{L}(H)$, $Ker\,(U - I) = \{0\}$ и $U$ — унитарный оператор. Тогда $A_U = i(I + U)(I - U)^{-1}$ — самосопряженный оператор.

Пусть $\{ I_\lambda \}$ — разложение единицы, порожденное оператором $A_U$. Тогда

$$U = U_{A_U} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{\lambda - i}{\lambda + i}\, dI_\lambda. \tag{17.5}$$

Поскольку $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$\Big|\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\Big| = \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Longrightarrow \frac{\lambda - i}{\lambda + i} = e^{i\varphi},\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Тогда

$$\lambda = i\frac{e^{i\varphi}+1}{1-e^{i\varphi}} = -\mathrm{ctg}\,(\varphi/2) =: G(\varphi).$$

Поскольку $G(\varphi)$ — строго возрастающая непрерывная функция, отображающая $(0; 2\pi)$ на $\mathbb{R}$, то в интеграле из равенства (17.5) можно сделать замену переменной $\lambda = G(\varphi)$ (см. утверждение 15.1). Тогда

$$U = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi}\, d\widetilde{I}_\varphi, \tag{17.6}$$

где $\widetilde{I}_\varphi := I_{G(\varphi)}$.

Равенство (17.6) есть *спектральное представление унитарного оператора* $U$, удовлетворяющего условию

$$Ker\,(U - I) = \{0\}.$$

# Список библиографических ссылок


1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1966.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М. : Наука, 1965.
3. *Рудин У.* Функциональный анализ. М. : Мир, 1975.
4. *Садовничий В. А.* Теория операторов : учеб. для вузов. 3-е изд., стер. М. : Высш. шк., 1999.
5. *Ильин А. М.* Линейные неограниченные операторы. Спектральное : разложение : учеб. пособие. : Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2007.
6. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. М. : МНЦМО, 2004.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1989.
8. *Данилин А.Р.* Функциональный анализ : учеб. пособие. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012.
9. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
10. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975.

Учебное издание

Ильин Арлен Михайлович
Данилин Алексей Руфимович

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ
САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Учебное пособие

| | |
|---|---|
| Заведующий редакцией | М. А. Овечкина |
| Редактор | В. И. Первухина |
| Корректор | В. И. Первухина |
| Компьютерная верстка | А. Р. Данилин |

Подписано в печать 05.03.2018 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 7,44
Уч.-изд. л. 4,2. Тираж 50 экз. Заказ 44.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

Для заметок

Лидер университетского книгоиздания
Университетская книга 2015

9785799623067

**ИЛЬИН АРЛЕН МИХАЙЛОВИЧ (1932–2013)**

Выдающийся российский математик, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН (2000), лауреат Государственной премии РФ (2000). Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета. Много лет преподавал на математико-механическом факультете Уральского государственного университета. Автор более 200 научных и учебных изданий, создатель научной школы по асимптотическим методам. Область научных интересов — уравнения в частных производных, асимптотические методы, бисингулярные задачи.

**ДАНИЛИН АЛЕКСЕЙ РУФИМОВИЧ**

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Уральского федерального университета. Окончил математико-механический факультет Уральского государственного университета им. А. М. Горького. Автор более 100 научных и учебных изданий. Область научных интересов — асимптотические методы в теории оптимального управления, некорректно поставленные задачи.